

Indhold

Forord	5
1 Indledning	7
2 Knudediagrammer	10
3 Trefarvning af knuder	15
4 Specielle typer knuder	19
5 Splejsning og primknuder	22
6 Krydstallet	26
7 Løsnetallet	32
8 Vridtal og lænketal	35
9 Jones-polynomiet	39
10 Beregning af Kauffman-polynomiet	46
11 Beregning af Jones-polynomiet	51
12 Jones-polynomiet og krydstallet	58
13 Jones-polynomiet og chiralitet	63
14 Conway-polynomiet	65
15 Genus-invarianten	67
16 Mutantknuder	71
Litteratur	74
Tabeller	75
Facitliste	79
Stikordsregister	80

Forord

Knudeteorien er en forholdsvis ny disciplin, som for størstedelens vedkommende er udviklet efter 1900. Faktisk blev en af de vigtigste ingredienser, *Jones-polynomiet*, indført så sent som i 1984.

Knudeteorien beskæftiger sig med egenskaber for de knuder, man kan binde på et lukket stykke snor og med klassifikationen af sådanne knuder.

Fremstillingen kræver ingen særlige matematiske forudsætninger og er velegnet til brug som valgfrit emne på A-niveauet i matematik i gymnasiet.

Kapitel 1 er en kort introduktion til knudeteorien, mens de vigtige Reidemeister-træk og invariant-begrebet indføres i kapitel 2. I kapitel 3 anvendes Reidemeister-trækkene til at vise, at trefarvning er en invariant.

I kapitel 4 indføres forskellige egenskaber for knudediagrammer, og i kapitel 5 defineres splejsningsoperationen mellem knuder og primknuder.

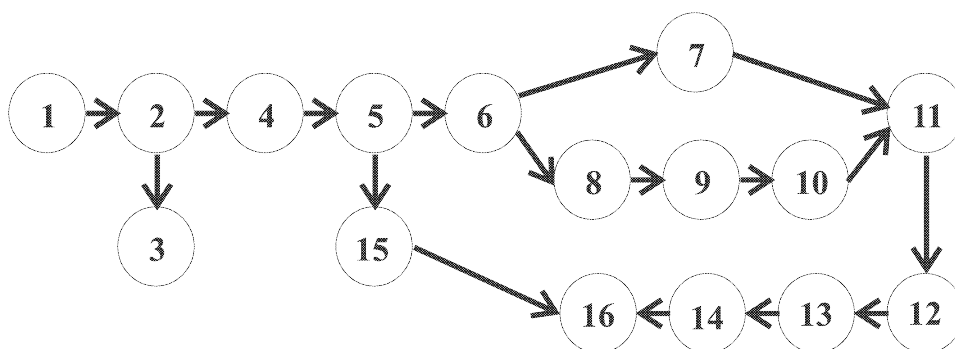
De første invarianter — krydstallet i kapitel 6, løsnetalet i kapitel 7, og vrid- og lænketallet i kapitel 8 — indføres, og vi begynder så småt på knudeklassifikationen i kapitel 6.

Jones-polynomiet introduceres i kapitel 9 vha. Kauffman-polynomiet, og egenskaber for disse størrelser behandles i de efterfølgende kapitler. Specielt i kapitel 12 ses anvendeligheden af Jones-polynomiet: Her bevises en vigtig formodning af Tait.

Conway-polynomiet omtales kort i kapitel 14, og et overblik over genus-invarianten gives i kapitel 15.

Endelig studeres de såkaldte Kinoshita-Terasaka- og Conway-knuder nærmere i kapitel 16, og vi beregner bl.a. Jones- og Conway-polynomierne af disse.

På nedenstående figur er vist sammenhængen mellem de forskellige kapitler.



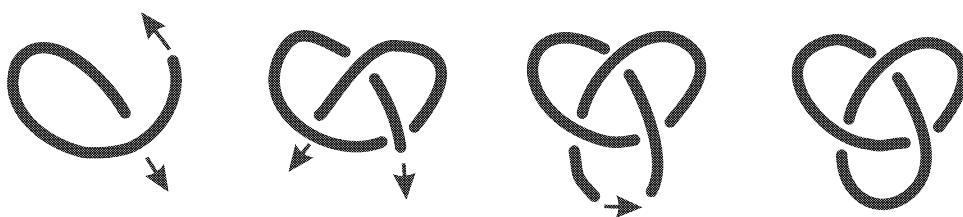
Kenneth Hansen
Aalborg
November 1998

1 Indledning

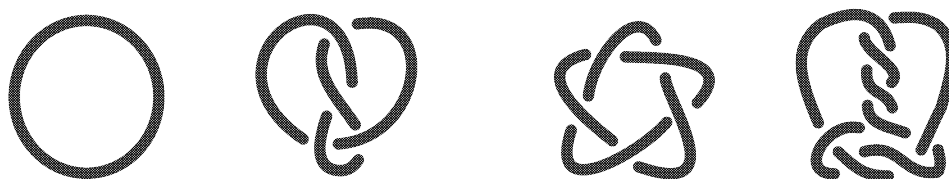
Vi skal i denne bog beskæftige os med knuder. Lad os begynde med at binde en knude:

Tag et stykke snor og bind løst en eller anden knude på den — lad være med at stramme til. Lim de to snorender sammen. Resultatet er en knude som på figur 1.

Vi limer de to ender sammen, fordi knuden ellers kan 'glide af' snoren. Knuden kaldes *trekløverknuden* og er en af de simpleste knuder. Andre knuder er vist på figur 2.



Figur 1:

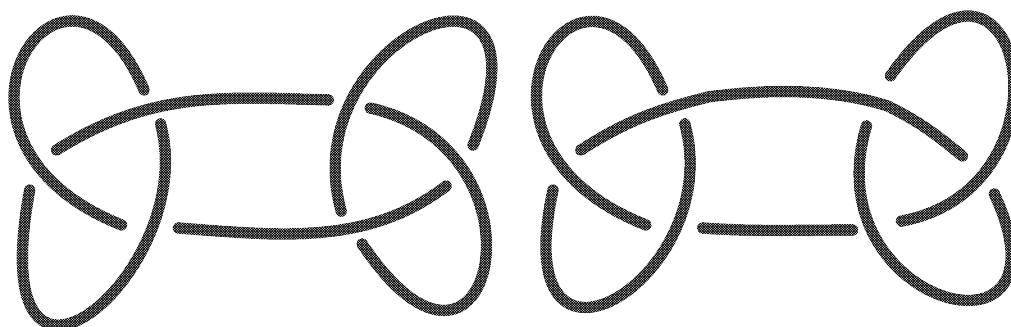


uknuden

ottetalsknuden

femkløverknuden

8_3



kællingeknuden

råbåndsknabet

Figur 2:

Uknuden kaldes også for den *trivielle knude*. Selve navnet 'uknude' er en oversættelse af det engelske ord 'unknot' og henviser til, at denne knude faktisk slet ikke er en knude. I virkeligheden kunne man sige, at 'the unknot is not a knot'.

Alle knuder har tekniske navne — således kaldes ottetalsknuden også 4_1 . Den lidt komplicerede knude 8_3 har ikke noget simpelt navn.

Det store 8-tal i navnet 8_3 fortæller, hvor mange gange snoren krydser sig selv i knuden — her 8 gange — mens det lille 3-tal er et løbenummer. Systemet er forklaret i detaljer i kapitel 6.

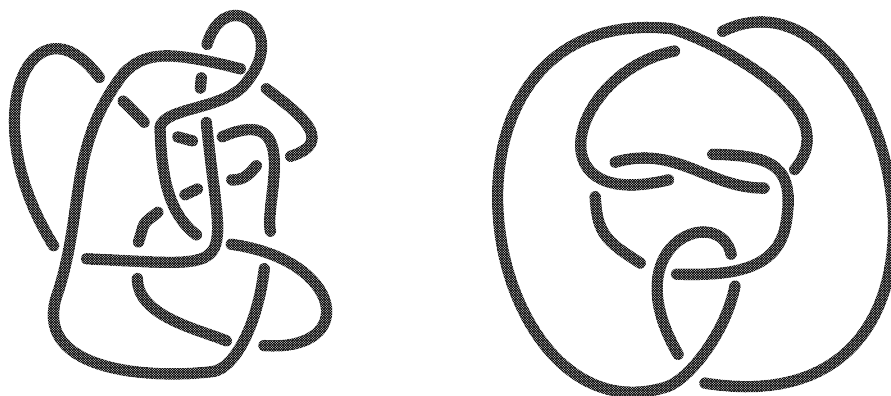
Vi skal også arbejde med *lænker*. En lænke består af flere stykker snor, der er filtret ind i hinanden, hvorefter snorenderne parvist er limet sammen. På figur 3 er vist nogle vigtige lænker. Andre knuder og lænker kan findes bag i bogen.



Figur 3:

Et problem indenfor knudeteorien er, at en knude ofte ser meget forskellig ud fra standardbilledet af denne knude. Således er knuden på figur 4 til venstre faktisk trekløverknuden i forklædning. Man kan overbevise sig om dette ved at lave knuden af et stykke snor, lime enderne sammen, og derefter flytte rundt på snoren, indtil man får den sædvanlige trekløverknude.

Ligeledes er den komplicerede knude til højre på figur 4 faktisk uknuden.



Figur 4:

Knudeteori hører hjemme i den del af matematikken, der kaldes *topologi*. Ordet 'topologi' stammer fra græsk og betyder 'læren om form'. Topologien blev grundlagt af Leonhard Euler (1707–1783).

Knudeteorien er en meget ung matematisk disciplin. Den opstod sidst i 1800-tallet, da fysikeren Lord Kelvin (William Thomson) (1824–1907) foreslog, at

atomer faktisk var 'knuder i æteren'. To matematikere, skotten Peter Guthrie Tait (1831–1901) og amerikaneren C. N. Little, begyndte uafhængigt af hinanden at opstille en tabel over samtlige knuder i håb om, at man på denne måde kunne få det periodiske system frem. Desværre tog Lord Kelvin fejl — og man opdagede senere elektronen og atomkernen og fik den moderne teori for atomernes opbygning.

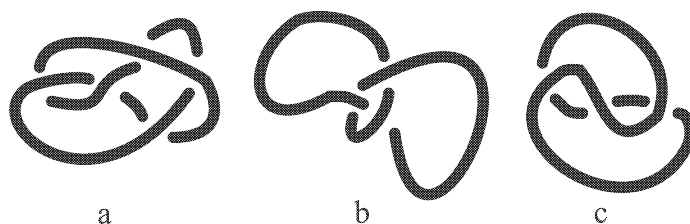
I 1920'erne og 30'erne begyndte udviklingen indenfor topologi at tage fart, og det smittede af på knudeteorien. Særligt aktive i denne periode var amerikaneren James Alexander (1888–1971) og tyskerne Herbert Seifert og Kurt Reidemeister (1893–1971). Også tyskeren Heinz Hopf (1894–1971) og amerikaneren John Henry Whitehead (1904–1960) bør nævnes — begge nyder den ære at have en lænke opkaldt efter sig.

Efter 1945 har scenen især været domineret af amerikaneren John Conway — en af dette århundredes mest kreative matematikere. Conway har arbejdet med knudeteori, talteori, spilteori, teoretisk datalogi og meget mere. Endvidere har han opfundet computersimuleringen *Life*.

I 1984 opdagede new zealænderen Vaughan Jones det såkaldte *Jones-polynomium*, som udover at være et stærkt værktøj indenfor knudeteorien også viste vejen frem til sammenhænge mellem knudeteori og andre grene af matematik og fysik. På nogenlunde samme tid opdagede biokemikerne, at biologiske molekyler, f.eks. DNA-molekylet, kunne danne knuder, og at disse knuder havde indflydelse på molekylets opførsel. Dette førte til en kraftig opblomstring af knudeteorien.

Den røde tråd i denne bog er *knudeklassifikation*, dvs. opskrivningen af en komplet liste over alle mulige knuder. Et af de vigtigste værktøjer her er det førnævnte Jones-polynomium, som vi derfor vil bruge en hel del tid på.

På figur 5 er vist tre knuder. Hvilke af disse er i virkeligheden uknuden? Hvilke er trekløverknuden? Brug evt. snor.



Figur 5:

Lav de to komplicerede knude fra figur 4 af snor og vis, at de faktisk er henholdsvis trekløverknuden og uknuden.

2 Knuediagrammer

Når man arbejder med knuder, er det ofte vanskeligt at lave knuden af snor og flytte rundt på den. Vi er i stedet nødt til at arbejde med en tegning af knuden, et såkaldt *knuediagram*.

Vi vil ikke give en formel definition af et knuediagram. I stedet bør man opfatte et knuediagram som det, man får, når man laver en knude af snor og derefter placerer denne knude fladt på bordet: Alle strengene ligger pænt i en plan, og ved hver krydsning kan man se, hvilken streng der er øverst, og hvilken der er nederst. Her betyder ordet 'streng' blot en del af snoren.

I praksis er vi nødt til at stille nogle krav til et knuediagram. Således må tre strenge ikke krydse i samme punkt, da vi ellers ikke kan afgøre, hvilken streng der er øverst, i midten eller nederst. Andre problemer kan opstå, hvis vi lader to strenge røre hinanden uden at krydse. Sådanne situationer kan dog nemt undgås.

Den samme knude kan godt repræsenteres af meget forskellige knuediagrammer. Vi skal derfor udvikle værktøjer til at undersøge, hvornår to knuediagrammer repræsenterer den samme knude. Disse værktøjer er de såkaldte *Reidemeister-træk* og de forskellige *invarianter*, vi skal beskæftige os med i resten af bogen.

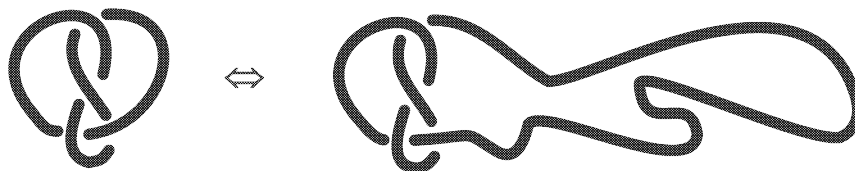
Hvis to knuediagrammer repræsenterer den samme knude, taler vi om *isotope* knuediagrammer. Ordet 'isotop' stammer fra græsk og betyder 'ens form'. Da vi ofte sidestiller et knuediagram med den tilhørende knude, vil vi også tale om isotope knuder.

Vores første problem er at afgøre, hvornår to knuediagrammer er isotope. Svaret på dette blev givet i 1920'erne af en af pionerne indenfor knudeteorien, tyskeren Kurt Reidemeister.

Reidemeister indførte fire typer af *træk* — forstået som træk i et spil skak. Et træk er her en lokal ændring af et knuediagram og dets krydsninger, således at det nye diagram er isotopt til det gamle.

De fire typer Reidemeister-træk er følgende:

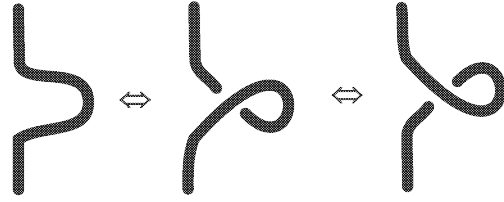
Træk 0:



Figur 6:

Vi kan tage en streng og deformere den af hjertens lyst, forudsat at der ikke fjernes eller opstår nye krydsninger. Se figur 6.

Træk 1:

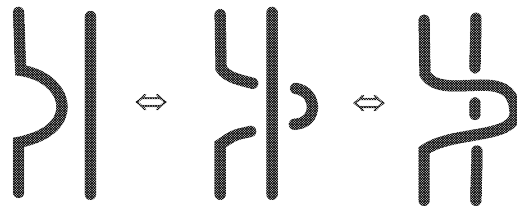


Figur 7:

Vi kan vride en streng som på figur 7, således at der opstår en *løkke*. Alternativt kan vi tillade os at fjerne en løkke.

(På denne, og mange andre figurer, er det underforstået, at vi kun betragter en del af knudediagrammet før og efter ændringen. Resten af diagrammet er uændret).

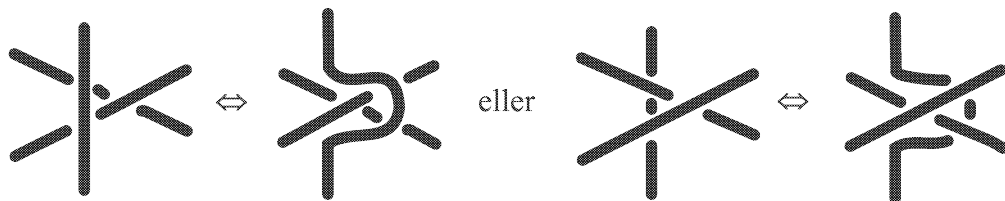
Træk 2:



Figur 8:

Her tager vi en streng og trækker ind over (eller under) en anden streng. Proceduren er vist på figur 8.

Træk 3:



Figur 9:

Her tager vi en streng og trækker den forbi en krydsning mellem to andre strenge. Se figur 9.

Man kan undre sig over, at vi nummererer de fire Reidemeister-træk som 0–3 og ikke 1–4. Dette har historiske årsager: Reidemeister arbejdede oprindeligt

kun med trækkene 1–3, og først senere fandt man ud af, at det var praktisk at indføre træk af type 0.

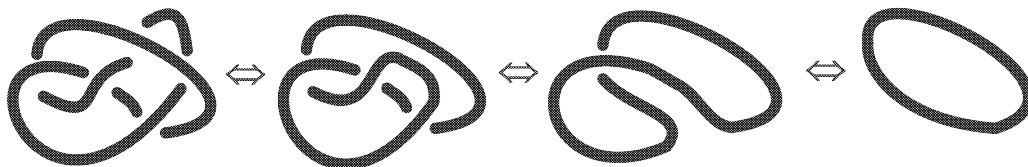
Det er indlysende, at Reidemeister-træk af disse fire typer ikke ændrer på selve knuden, men kun på knudediagrammet. Reidemeisters hovedsætning er

Theorem 1 *To knudediagrammer er isotope, hvis og kun hvis man kan komme fra det ene til det andet ved endeligt mange Reidemeister-træk.* \square

Beviset er meget teknisk, så vi udelader det.

På figur 10 ses, hvorledes knuden i opgave 1.1a kan laves om til uknuden.

På figur 11 er vist i detaljer, hvorledes knuden fra figur 4 kan laves om til trekløverknuden.



Figur 10:

Det hyppigst optrædende begreb indenfor knudeteorien er *invarianter*. En invariant er en størrelse, som vi tildeler til hvert knudediagram. Denne størrelse skal opfylde, at hvis to knudediagrammer er isotope, så er invarianten for de to knudediagrammer også ens. Det er derfor meningsfyldt at tale om invarianten for den underliggende knude.

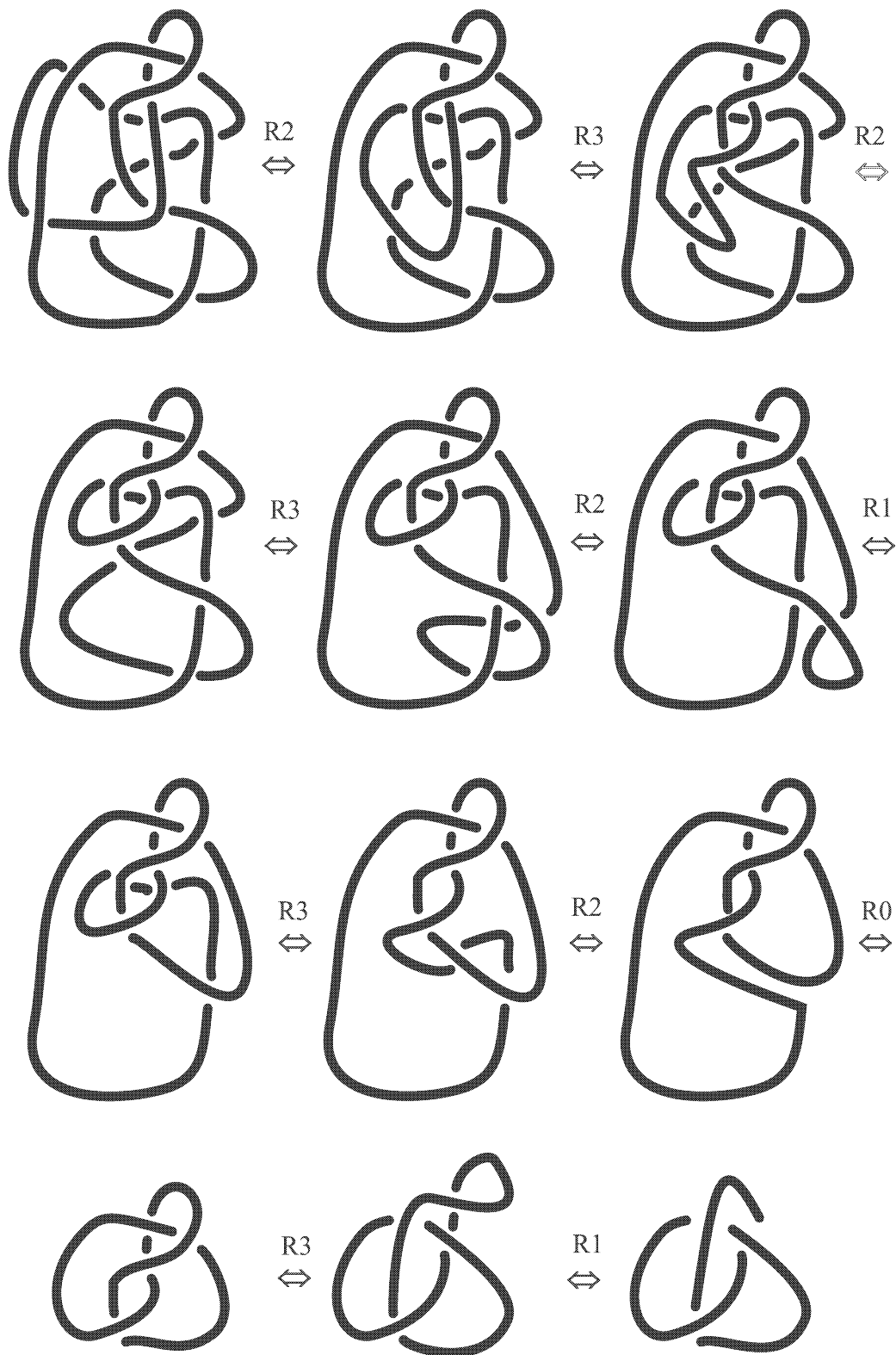
Invarianter bruges især til at skelne mellem forskellige knuder: Hvis to knuder har en forskellig invariant, så kan de ikke være isotope. For var knuderne isotope, så skulle invarianterne jo stemme overens.

Vi kan desværre ikke konkludere det modsatte, nemlig at hvis to knuder har den samme invariant, så er knuderne isotope. Dette gælder kun for såkaldte *universelle invarianter* — desværre har man endnu ikke fundet en sådan for knuder, og det er tvivlsomt, om den findes.

Lad os give et eksempel på invarianter fra kriminallitteraturen. Vi betragter mængden af mennesker. I denne mængde findes der mange invarianter, f.eks. navnet, skonnummeret eller telefonnummeret.

På godset Knot Manor er der begået et frygteligt mord — butleren er dolket ihjel. Vi kalder morderen for A. Politiet har nogle mistænkte, nemlig stuepigen Rose Smith (B), godsejeren Sir John Smith (C) og gartneren Thomas Baker (D). Politiet vil gerne vide, om A er lig B, C eller D.

Ved butlerens lig fandt man en seddel skrevet med ofrets blod: 'Smith gjorde det.' Ved anvendelse af navne-invarianten kan politiet nu konkludere, at A og D er forskellige. Man kan ikke konkludere noget om B eller C.



Figur 11:

Man fandt også et skoaftryk ved liget — morderens skoaftryk. Politiet ved derfor, at morderen A har skonummeret 43. Da stuepigen B har skonummeret 38 og godsejeren C skonummeret 43, kan politiet nu udelukke B som morderen, men ikke C.

Kan politiet konkludere, at C er morderen? Nej, det kunne jo ligeså godt være landsbypræsten, rev. Henry Smith, eller den pensionerede officer fra Indien, Major Smith. Begge bruger nemlig også størrelse 43 i sko.

Heldigvis har politiets mere raffinerede metoder, f.eks. fingeraftryk, blodtyper og DNA-analyser. Dette er i virkeligheden universelle invarianter.

Indenfor knudeteorien er der et eksempel på, hvor svært det kan være at se, hvornår to knuder er ens. Knuderne på figur 12 var i Littles knudetabel fra 1899 opskrevet som forskellige knuder, nemlig som 10_{161} og 10_{162} .



Figur 12:

Først i 1974 — hele 75 år senere — opdagede den amerikanske matematiker K. A. Perko, at knuderne faktisk var ens. Vi skal i kapitel 8 se, hvordan Little kunne tage så grueligt fejl.

Hvilke typer Reidemeister-træk blev der brugt på figur 10?

Vis, ved at lave de relevante Reidemeister-træk, at knuden i opgave 1.1c faktisk er uknuden.

Angiv en række Reidemeister-træk, som laver knuden på figur 4 til højre om til uknuden.

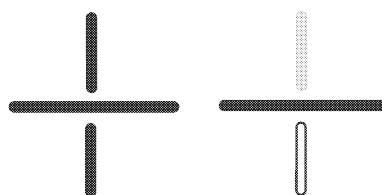
3 Trefarvning af knuder

Vi skal nu betragte vores første invariant. Vi deler alle knudediagrammer op i to grupper, nemlig dem, der kan *trefarves*, og dem, der ikke kan. Herefter viser vi, at vi har en invariant egenskab, dvs. hvis vi har to isotope knudediagrammer, og det ene kan trefarves, så kan det andet også.

Definition 1 En *trefarvning* af et knudediagram er en tildeling af tre farver til de forskellige strenge, således at følgende betingelser er opfyldt:

- Mindst to farver benyttes.
- Imellem hver krydsning har snoren den samme farve.
- Ved enhver krydsning optræder én af følgende situationer: Enten har de to strenge samme farve, eller også har den øverste streng den samme farve gennem hele krydsningen og den nederste streng har den anden farve før og den tredje farve efter krydsningen.

I denne bog vil vi anvende farverne sort, grå og hvid. Den typiske situation ved en krydsning er ifølge betingelsen c) én af de to situationer på figur 13.

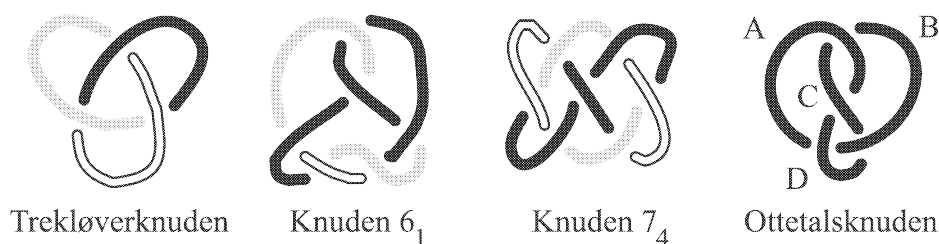


Figur 13:

Inden vi viser, at trefarvningsegenskaben er en invariant, er det nok på sin plads med et par eksempler.

Det sædvanlige diagram for uknuden kan ikke trefarves, da vi kun kan få brugt en farve.

Trekløverknuden, knuderne 6_1 og 7_4 kan trefarves. Trefarvningerne er vist på figur 14, og man ser, at for 7_4 optræder den 'ensfarvede' situation i krydsningen midt i diagrammet.



Figur 14:

Ottetalsknuden kan ikke trefarves. Lad os argumentere for dette: Kald de 4 strenge i figur 14 for A, B, C og D og de anvendte farver for 1, 2 og 3.

Vi begynder med at tildele strengen A farven 1. I den øverste krydsning møder A strengene B og C. Vi skal nu vælge mellem, om B og C får samme farve som A, eller om de får forskellige farver.

Hvis A, B og C alle har samme farve, så viser krydsningen, hvor A, B og D mødes, at D også skal farves med farven 1. Men dette giver ikke en trefarvning, da vi kun har brugt en farve — jvf. betingelse a) i definition 2.

Hvis A, B og C har forskellige farver, f.eks. 1 (til A), 2 (til B) og 3 (til C), så viser krydsningen mellem A, B og D, at D skal have farven 3. Men krydsningen mellem A, C og D viser, at D skal have farven 2. (Og for at gøre ondt værre, så viser krydsningen mellem B, C og D, at D skal have farven 1). Vi kan altså i dette tilfælde ikke farve strengen D på nogen mulig måde, så betingelsen c) i definition 2 kan ikke opfyldes.

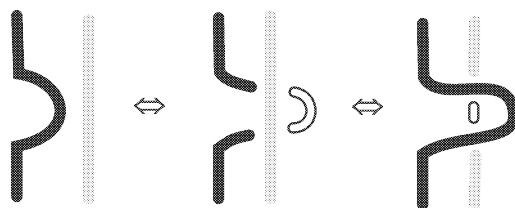
Theorem 2 *Trefarvnings-egenskaben er invariant under isotopier, dvs. hvis en knude kan trefarves, så kan en knude isotop med denne knude også trefarves.* □

PROOF Vi viser, at har vi en trefarvning før et Reidemeister-træk, så kan vi også lave en trefarvning efter trækket. Da vi kun arbejder med en del af en knude, så skal vi kræve, at de strenge, der forbinder vores del med resten af knuden, ikke må ændre farve.

Ved Reidemeister-træk af type 0 er der ikke noget at snakke om, da vi bare laver om på en streng uden at tilføje eller fjerne krydsninger.

Ved Reidemeister-træk af type 1 er situationen, at vi har en ensfarvet streng, som vi slår en løkke på. Vi beholder snorens farve efter at løkken er slået, og alt er vel.

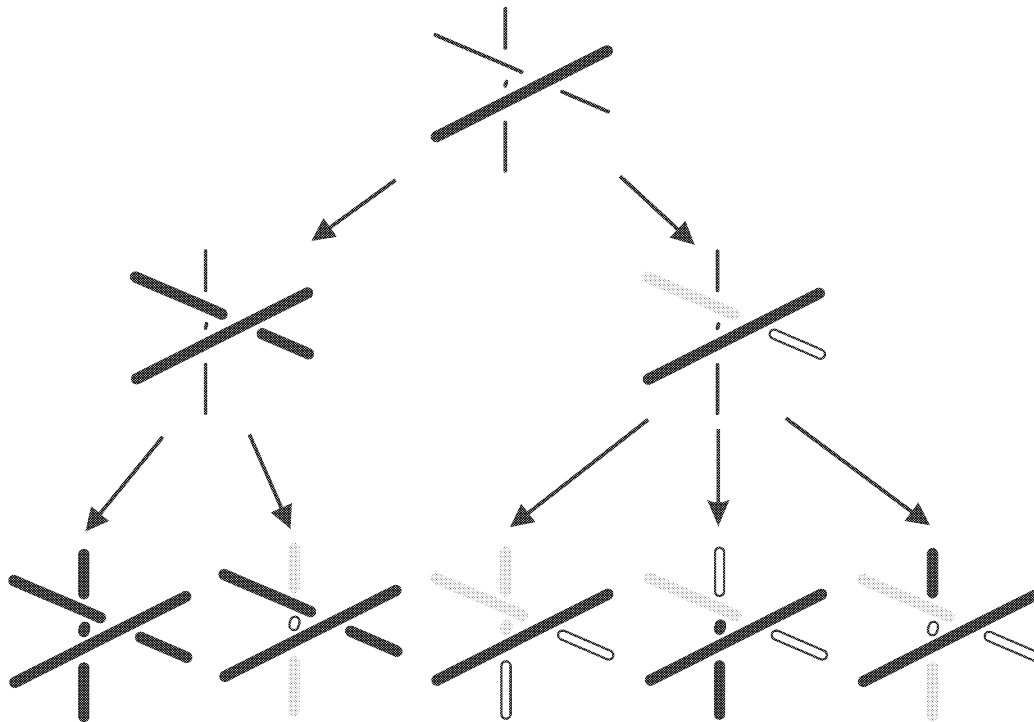
Omvendt skal vi kunne fjerne en løkke og stadigvæk bibeholde trefarvningen. Men det er let at se, at snoren med løkken må være ensfarvet, og løkken kan derfor fjernes.



Figur 15:

Ved Reidemeister-træk af type 2 trækker vi en streng hen over eller under en anden streng, som vist på figur 15. Hvis strengene har samme farve, så er der ingen problemer. Hvis strengene har forskellig farve, så opstår der et nyt stykke, som vi kan tildele den tredje farve.

Ved Reidemeister-træk af type 3 er der adskillige tilfælde at undersøge. Vi nøjes med at gennemføre beviset for den variant af træk 3, hvor vi flytter den nederste streng. De forskellige muligheder for farvningen af strengene er opsummeret på træet i figur 16.



Figur 16:

På denne figur angiver tynde strenge de strenge, der endnu ikke er farvet. Vi begynder i den første række med at farve den øverste streng, f.eks. sort.

I anden række farver vi den midterste streng. Den kan enten også være sort som i den venstre forgrening, eller grå og hvid, som i forgreningen til højre. Til sidst skal vi farve den nederste streng. I forgreningen til venstre kan vi enten farve det øverste stykke sort eller grå/hvid. Hvis dette stykke bliver sort, så er hele strengen sort, og vi får den første mulige trefarvning. Hvis dette stykke ikke bliver sort, så kan vi tildele resten af strengen andre farver, og vi får den anden mulighed.

I den anden forgrening farver vi det øverste stykke — det ses, at der er tre muligheder, og hver af disse giver en gyldig farvning.

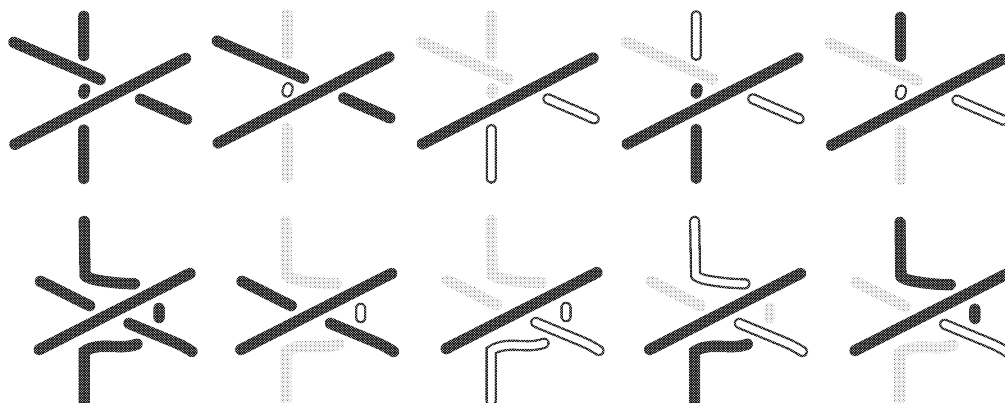
Endelig skal vi for hver af de fem muligheder udføre Reidemeister-trækket og tildele resultatet en gyldig trefarvning, som bevarer farven af de ydre strenge. Dette er gjort på figur 17.

Alt i alt kan vi konkludere, at hvis et knudediagram kan trefarves før et Reidemeister-træk, så kan det også trefarves bagefter. Trefarvningsegenskaben er derfor en invariant. ■

En anvendelse af trefarvning er følgende:

Theorem 3 *Trekløverknuden er ikke isotop med uknuden.* □

Trekløverknuden kan trefarves, men det kan uknuden ikke. Da trefarvningsegenskaben er en invariant, får vi sætningen.



Figur 17:

Desværre er trefarvning ikke en særligt fintfølelse invariant: Da hverken uknuden eller ottetalsknuden kan trefarves, kan vi ikke på nuværende tidspunkt bevise, at disse to knuder er forskellige. Hertil kræves mere avancerede metoder.

Hvilke af følgende knuder og lænker kan trefarves: 5_1 , 5_2 , 0_1^2 , 2_1^2 , 4_1^2 , 5_1^2 og 8_{10} ?

(Bag i bogen er der tegninger af alle disse knuder og lænker).

Bevis, at lænkerne 0_1^2 og 5_1^2 ikke er isotope.

(Vink: Brug resultatet af opgave 3.1)

Vis, at både råbåndsknøbet og kællingeknuden kan trefarves.

Find dernæst en trefarvning, hvor den ene halvdel af råbåndsknøbet er ensfarvet.

4 Specielle typer knuder

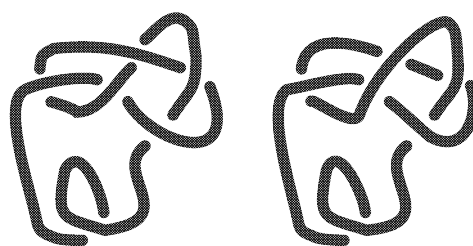
Vi vil nu kigge på nogle vigtige egenskaber, som visse knuder er i besiddelse af.

Definition 2 Et knudediagram kaldes *alternerende* (dvs. skiftende), hvis man, når man begynder et tilfældigt sted på snoren og gennemløber knuden, skiftevis er øverst og nederst i krydsningerne.

En knude er *alternerende*, hvis den har et alternerende knudediagram. \square

Betragt figur 18. Diagrammet til venstre er alternerende, mens det til højre ikke er alternerende.

Dette betyder dog ikke, at **knuden** til højre ikke er alternerende; vi kan nemlig ved to Reidemeister-træk — type 1 og type 2 — lave diagrammet om til standard-diagrammet for trekløverknuden, og dette diagram er jo alternerende.



Figur 18:

Generelt er alle simple knuder alternerende. De første ikke-alternerende knuder, vi støder på, er 8_{19} , 8_{20} og 8_{21} . Vi skal senere vise, at disse tre ikke er alternerende.

Alternerende knuder er vigtige, fordi de er nemme at arbejde med, og fordi der gælder mange sætninger for alternerende knuder, som ikke nødvendigvis er sande for ikke-alternerende knuder.

Mange invarianter kræver et *orienteret* knudediagram. Hermed menes, at vi giver snoren en retning. En orientering af en knude angives med små pile, som på figur 19.

Generelt kan en knude orienteres på to forskellige måder. På figur 19 har vi begge orienteringer for knuden 5_2 .

Er det ligegyldigt, hvilken orientering vi vælger? For länkens vedkommende er svaret nej — ændrer vi orienteringen af bare en komponent, så vil lænken og dens invarianter i almindelighed ændre sig drastisk. For knuders vedkommende er situationen bedre:

Definition 3 En knude kaldes *invertibel*, hvis knuden med den ene orientering er isotop med knuden med den anden orientering. \square

Knuden 5_2 er invertibel: Dette kan ses ved at tage det ene orienterede knudediagram og dreje 180° omkring den stiplede linie på det tredje diagram. Herved får vi den anden orientering. Man kan også anvende Reidemeister-træk til at lave det ene diagram om til det andet, men det er kompliceret.



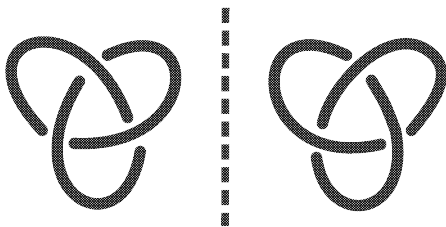
Figur 19:

Det viser sig, at der findes knuder, som ikke er invertible. Den simpleste er 8_{17} . Ikke-invertible knuder er besværlige i den mere avancerede knudeteori, men de vil heldigvis ikke volde problemer for os.

Definition 4 En knude kaldes *achiral*, hvis den er isotop med sit spejlbillede.

En knude kaldes *chiral* (udtales 'kiral'), hvis den **ikke** er isotop med sit spejlbillede. \square

Bemærk, at vi kan få spejlbilledet af en knude frem ved at lave alle overkrydsninger til underkrydsninger og omvendt. Spejlbilledet til knuden K betegnes ofte med K^* .



Figur 20:

Som eksempel på en chiral knude kan nævnes trekløverknuden - de to spejlbilleder på figur 20 er ikke isotope. Spejlingsaksen er den stiplede linie mellem de to knuder.

Vil vi vise, at 3_1 er chiral, får vi brug for en invariant, som kan skelne mellem spejlbilleder. En sådan invariant viser sig at være *Jones-polynomiet*.

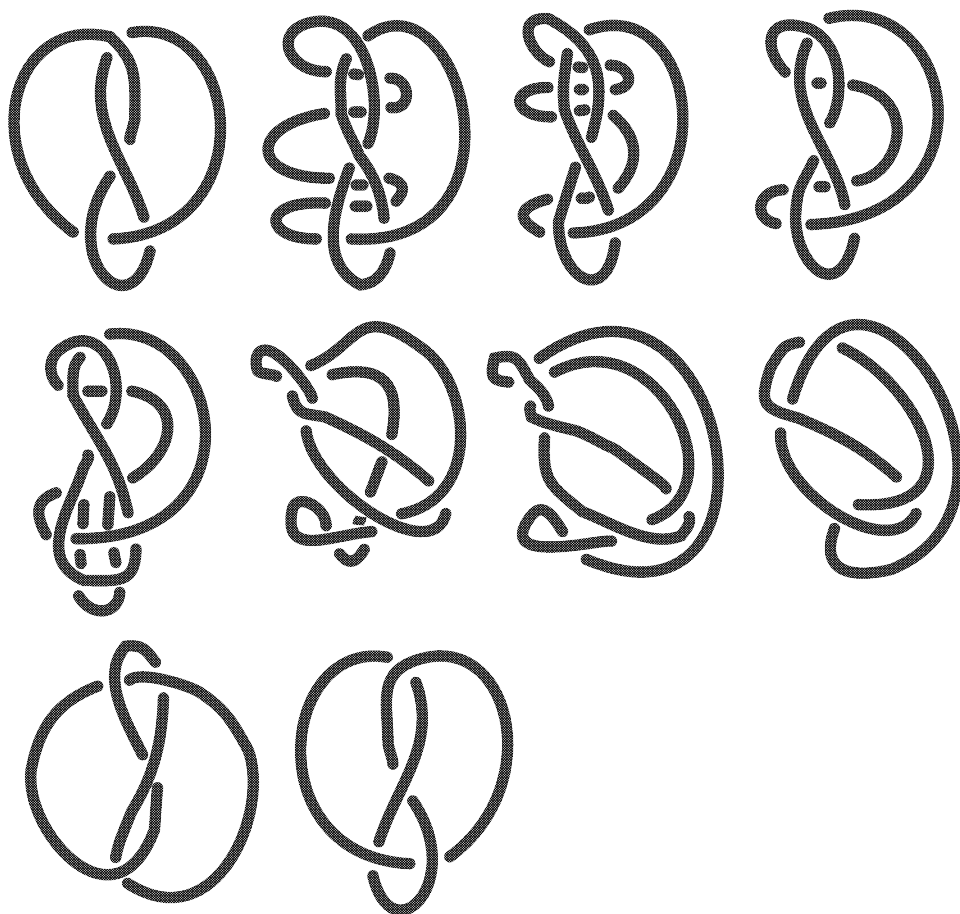
De fleste knuder er chirale — undtagelserne blandt de simple knuder er 0_1 , 4_1 , 6_3 , 8_3 , 8_9 , 8_{12} , 8_{17} og 8_{18} .

For at bevise, at ottetalsknuden er achiral, skal vi finde en række Reidemeister-træk, som fører knuden over i sit spejlbillede. Dette er gjort på figur 21.

Diagrammet for råbåndsknøbet på figur 2 er ikke alternerende. Bevis, at råbåndsknøbet alligevel er en alternerende knude.

Hvilke af primlænkerne på figur 77 bag i bogen er ikke alternerende
Bevis, at uknuden og trekløverknuden er invertible.

Angiv i 'tegneserie-beviset' på figur 21 hvilke Reidemeister-træk, der er anvendt fra billede til billede. (Vink: Den sidste ændring er ikke et Reidemeister-træk, men en drejning på 180° med uret).



Figur 21:

5 Splejsning og primknuder

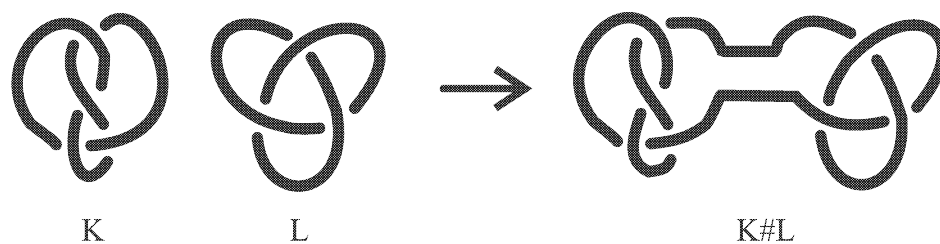
Vi skal nu se på, hvorledes man kan 'regne med' knuder. Den regneoperation, vi skal beskæftige os med, defineres således:

Definition 5 Lad K og L være to knuder. *Splejsningen* af K og L , betegnet $K\#L$, er den knude, der fremkommer ved at fjerne et lille stykke af snoren i K og et lille stykke af snoren i L og lime de to ender parvist sammen. (Se figur 22). □

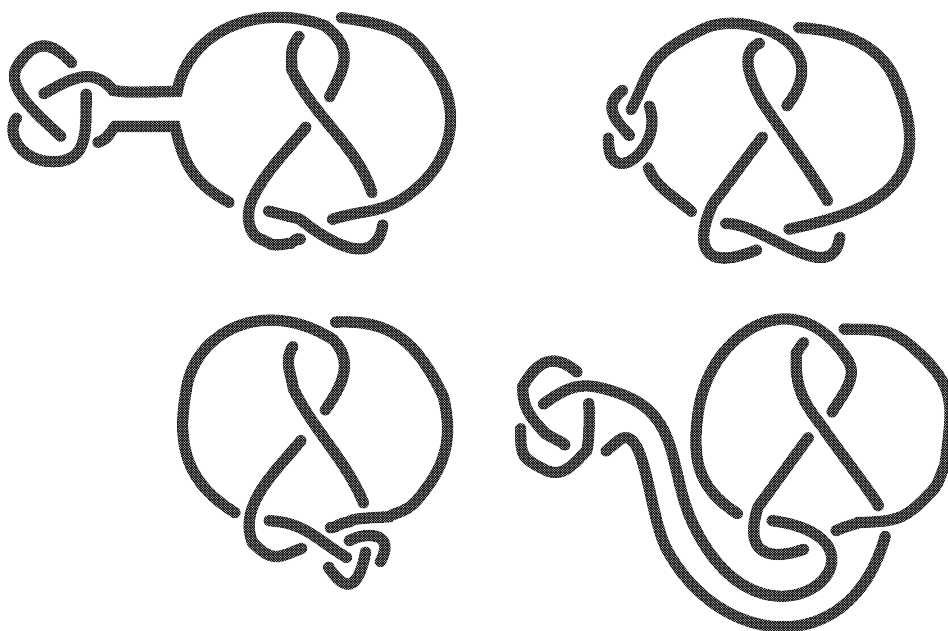
Symbolet $K\#L$ læses som 'K splejs L'

Den årvågne læser undrer sig nok over, om man ville få et andet resultat, hvis man splejsede de to knuder et andet sted. Svaret er nej, som 'tegneserien' på figur 23 viser.

Vi kan nemlig gøre den ene knude ganske lille og lade den glide langs snoren i den anden knude, indtil vi kommer til det nye splejsningssted.



Figur 22:



Figur 23:

Dette gælder ikke for lænker — her har det betydning, hvilke to komponenter, man splejser sammen. Heldigvis skal vi ikke beskæftige os ret meget med splejsede lænker.

Der gælder følgende regneregler for splejsning:

Theorem 4 *Lad K , L og M være tre knuder, og lad U betegne uknuden. Så gælder*

- a) $U\#K = K$
- b) $K\#L = L\#K$
- c) $K\#(L\#M) = (K\#L)\#M$

Vi vil ikke bevise denne sætning, men overlader dette til læseren.

For at kunne studere splejsnings-operationen nærmere, får vi brug for *genus-invarianten*. Definitionen heraf er kompliceret, så vi venter med detaljerne til kapitel 15 og nøjes her med resultaterne.

Theorem 5 Der findes en invariant — genus-invarianten — der til en knude K knytter tallet $g(K)$. Denne invariant opfylder følgende egenskaber:

- a) $g(K)$ er altid et ikke-negativt, helt tal.
- b) $g(U) = 0$, hvor U betegner uknuden. Uknuden er endvidere den eneste knude med genus 0.
- c) $g(K\#L) = g(K) + g(L)$

Bag i bogen findes en tabel over genus for de simpleste knuder. Nogle konsekvenser af denne sætning er:

Theorem 6 Uknuden kan ikke skrives som splejsningen af to ikke-trivielle knuder. □

Antag, at $U = K\#L$, hvor U som sædvanlig betegner uknuden. Ved at anvende genus-invarianten på denne ligning, fås

$$0 = g(U) = g(K) + g(L)$$

Da $g(K) \geq 0$ og $g(L) \geq 0$, må vi konkludere, at $g(K) = g(L) = 0$, og sætning 10b viser, at både K og L er uknuden.

Theorem 7 Lad K være en ikke-triviel knude. Så findes der **ikke** en knude L , således at $K\#L = U$. □

Antag, at vi har en knude L , således at $K\#L = U$. Anvender vi genus-invarianten på denne ligning, fås

$$0 = g(U) = g(K) + g(L)$$

eller $g(L) = -g(K)$. Men da $g(L)$ er et ikke-negativt tal, fås en modstrid. Knuden L eksisterer altså ikke.

Umiddelbart kunne man forestille sig, at splejsning var en form for 'addition af knuder', og at uknuden svarer til tallet 0. Men disse to sætninger viser, at det er en dårlig måde at tænke på splejsning på: Der findes ikke 'negative knuder'.

I stedet skal man opfatte splejsning som multiplikation af positive hele tal. Modstykket til uknuden er tallet 1, og sætningerne 11 og 12 svarer til, at man normalt ikke kan dividere hele tal.

Primknuder kan i dette billede sidestilles med primtal:

Definition 6 En *primknude* er en knude, der **ikke** kan skrives som splejsningen af to ikke-trivielle knuder.

En *primlænke* er en lænke, der **ikke** kan skrives som splejsningen af to ikke-trivielle lænker.

En knude (eller lænke), der ikke er en primknude (eller primlænke), kaldes *sammensat*. □

Sætning 11 viser, at uknuden er en primknode. Der findes også mange andre primknuder, således er trekløverknuden og ottetalsknuden primknuder. Råbåndsknøbet og kællingeknuden er sammensatte knuder.

Generelt findes der ingen metoder til at afgøre, om en given knude er en primknode. Der findes dog invarianter, som kan vise, at en given knude er en primknode — således er alle knuder med genus 1 primknuder.

Ligesom ethvert primtal kan opløses entydigt i et produkt af primtal, så kan en sammensat knude opløses i primknuder:

Theorem 8 *Lad K være en knude. Så kan K skrives som $K = P_1 \# P_2 \# \dots \# P_m$, hvor knuderne P_i alle er ikke-trivielle primknuder. Endvidere er denne primknodeopløsning entydig, dvs. to forskellige primknodeopløsninger adskiller sig kun fra hinanden i rækkefølgen af primknuder.* \square

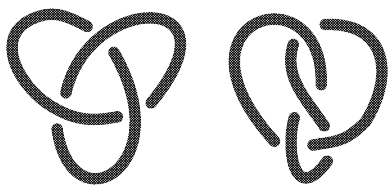
Beviset udelades.

Indholdet af denne sætning er, at det er nok at klassificere primknuder i stedet for at klassificere alle mulige knuder.

Lad os et kort øjeblik vende tilbage til Lord Kelvins (forkerte) teori om, at atomer er knuder i æteren. Her er det faktisk primknuderne, der er atomer. Når to atomer forbindes, svarer det til en splejsning af de tilsvarende primknuder, og molekyler opfattes derfor som sammensatte knuder.

En anden operation på knuder er den *disjunkte forening*. Denne operation er ikke så interessant som splejsning, men den dukker op mange steder.

Definition 7 Den disjunkte forening, $K \amalg L$, af knuderne K og L er lænken opstået ved at placere en kopi af K ved siden af en kopi af L , således at de to knuder ikke rører hinanden. \square



Figur 24:

en *split-lænke*.

Lad T betegne den sædvanlige trekløverknode, og T^* spejlbilledet af denne knude. Hvad hedder knuderne $T \# T$ og $T \# T^*$?

Bevis, at hvis en knude K har $g(K) = 1$, så er K en primknode.

Brug dette og tabellen over knudeinvarianter bag i bogen til at vise, at knuderne 3_1 og 4_1 er primknuder.

Man kan vise, at lænken $0_1^2 = U \amalg U$ er en primlænke. Gør rede for, at $U \amalg U \amalg U$ er en sammensat lænke.

Bevis sætning 9.

Symbolet $K \amalg L$ læses 'K disjunkt L'.

På figur 24 er vist den disjunkte forening af trekløverknuden og ottetalsknuden.

Bemærk, at der er tale om én lænke med to komponenter.

En lænke, der kan skrives som den disjunkte forening af to andre lænker, kaldes

6 Krydstallet

Det vigtigste invariant overhovedet er *krydstallet*. Definitionen er

Definition 8 Lad K være en knude. *Krydstallet*, $c(K)$, defineres som det mindste antal krydsninger, som kan forekomme i et diagram for knuden. \square

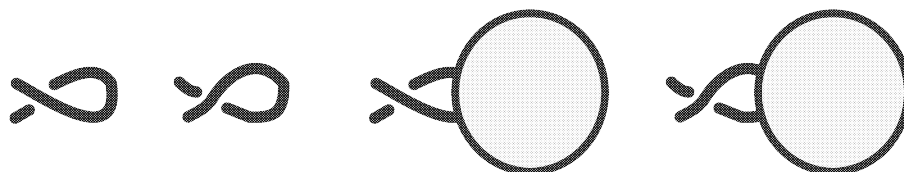
Krydstallet er generelt vanskeligt at beregne: Har vi et knudediagram med n krydsninger, så kan vi ikke konkludere, at krydstallet er n , men kun at krydstallet **højst** er n .

Der findes derfor ingen generel metode til at beregne krydstallet for et givet knudediagram. Der er dog hjælp at hente i specielle situationer:

For at finde krydstallet skal vi finde et *minimalt* diagram, dvs. et diagram med netop $c(K)$ krydsninger. Hvordan ser sådan et diagram mon ud?

For det første skal vi undgå, at der er løkker i diagrammet. En løkke kan jo fjernes ved at lave Reidemeister-træk af type 1, og dette vil sænke antallet af krydsninger med 1.

Generelt betragter man *reducerede* diagrammer, som er diagrammer, hvor situationerne i figur 25 **ikke** forekommer. Her skal de grå cirkler tolkes som en del af et knudediagram. I hver af situationerne kan vi vride en del af knuden og få en krydsning mindre, så derfor er ikke-reducerede diagrammer aldrig minimale.



Figur 25:

For det andet skal vi undgå, at man kan mindske antallet af krydsninger med Reidemeister-træk af type 2. Dette er tilfældet i alternerende diagrammer — i optakten til et Reidemeister-træk af type 2 skal vi jo have en snor, der er øverst (eller nederst) to gange efter hinanden, og det kan jo ikke ske i et alternerende diagram.

For det tredje skal vi heller ikke kunne lave Reidemeister-træk af type 3. Men dette er også umuligt i et alternerende diagram.

Endelig er der Reidemeister-træk af type 0 tilbage, men disse ændrer jo ikke på antallet af krydsninger.

I et reduceret, alternerende diagram er vi altså sat 'skakmat' — vi kan ikke umiddelbart gøre knuden simplere, og ændrer vi på knuden, fås flere krydsninger.

Disse betragtninger leder os frem til den formodning, at reducerede, alternerende diagrammer er minimale. Denne formodning blev fremsat af Tait allerede i 1898, men blev først bevist i 1986. Vi opskriver den som en sætning:

Theorem 9 Hvis en knude K har et reduceret, alternerende diagram med n krydsninger, så er $c(K) = n$. □

Beviset, som anvender Jones-polynomiet, gennemføres i kapitel 12.

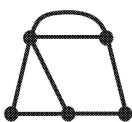
Ved hjælp af denne sætning kan vi umiddelbart se, at uknuden, trekløverknuden og ottetalsknuden har krydstallene henholdsvis 0, 3 og 4. Standarddiagrammerne for disse knuder er nemlig reducerede og alternerende. Bemærk, at sætningen ikke siger noget om ikke-alternerende knuder.

Et uløst problem indenfor knudeteorien er følgende: Lad K og L være to knuder. Gælder der så, at

$$c(K\#L) = c(K) + c(L)?$$

Svaret er ja, hvis K og L er alternerende knuder, men man kender ikke det generelle svar.

Bag i hæftet er vist tabeller over samtlige primknuder med krydstal højst 8 og primlænker med krydstal højst 6. Vi kan nu løfte sløret for, hvorledes disse knuder er navngivet: Alle knuderne har et navn af formen c_n , hvor c er krydstallet og n er et løbenummer. For lækernes vedkommende er navnet c_n^k , hvor k er antallet af komponenter.



Figur 26:

Disse tabeller, og nummereringen af primknuderne, stammer tilbage fra Tait og Little, og der er ikke umiddelbart noget logisk mønster i tildelingen af løbenummeret n .

Man kan lave en sådan tabel ved at betragte sammenhængen mellem knuder og grafer. En graf er et objekt, som består af nogle punkter, *hjørnerne*. Disse hjørner er forbundet med *kanter*, og der kan godt være flere kanter mellem

to hjørner. Se figur 26.

Vi kan knytte en graf til et knudediagram således:

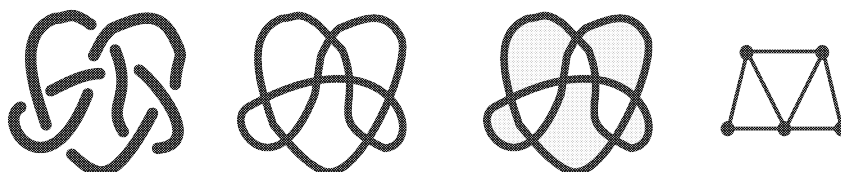
Først glemmer vi, hvilke strenge der øverst eller nederst i hver krydsning. Det fremkomne objekt kaldes en *knudeprojektion*.

Knudeprojektionen deler planen op i forskellige *regioner*. Man kan nu farve disse regioner hvide og sorte, således at den ydre region er hvid, og to regioner med en fælles grænse har forskellig farve.

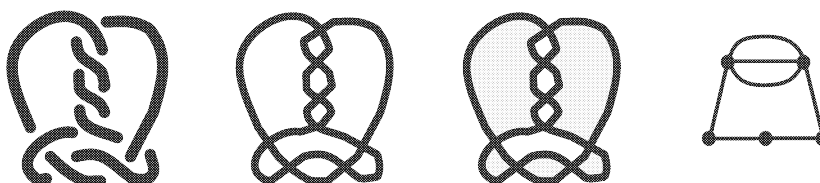
Der gælder således, at to sorte regioner ikke kan røre ved hinanden, men nok mødes i en krydsning. En sådan farvning af en knudeprojektion kaldes en *skakbræts-farvning*.

Endelig kan vi lave en graf: Til hver sort region tildeles et hjørne. To hjørner forbindes med en kant, hvis de to sorte regioner møder hinanden i en krydsning.

Proceduren er gennemført for standard-diagrammerne for knuderne 7_7 og 8_3 på figurerne 27 og 28. Bemærk, at i grafen for 8_3 er der to hjørner, som er forbundet med mere end en kant.

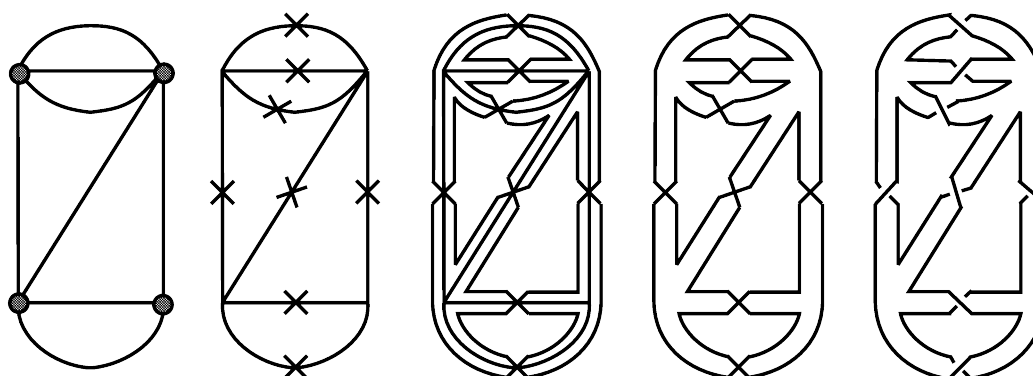


Figur 27:



Figur 28:

Man kan rekonstruere knudeprojektionen ud fra grafen. Proceduren er vist på figur 29.



Figur 29:

Først sættes et kryds på hver kant. Herefter forbindes krydsenes spidser med hinanden, så man får figuren i midten. Endelig sletter man selve grafen, og man har knudeprojektionen.

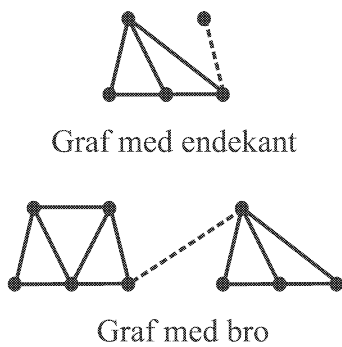
Bemærk, at vi ikke kan få selve knudediagrammet tilbage, da vi har glemt alt om krydsningerne. Faktisk er der i en knudeprojektion med n krydsninger 2^n knudediagrammer, der svarer hertil.

Den sidste tegning på figur 29 er et af de knudediagrammer, der kan fås fra knudeprojektionen. Der er 8 krydsninger, så vi kan lave i alt $2^8 = 256$ forskellige knudediagrammer for denne knudeprojektion.

Tait brugte grafer til at klassificere alle primknuder med op til 10 krydsninger. Lad os illustrere metoden ved at vise, hvorledes man finder alle knuder og lænker med krydstallet n .

Man begynder med at tegne alle mulige (sammenhængende) grafer med n kanter. Herefter oversætter man graferne til knudeprojektioner, og for hver projektion tegner man de 2^n mulige knudediagrammer.

Mange af disse knuder har krydstal mindre end n og ignoreres derfor. Blandt de resterende knuder fjerner vi gentagelserne, som der altid forekommer. Endelig skal vi fjerne de nye, sammensatte knuder. Resten er primknuderne med krydstallet n .



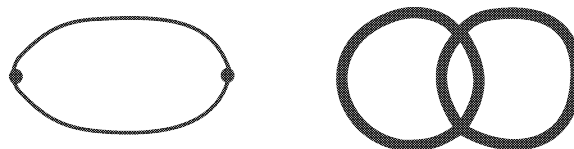
Figur 30:

Lad os lave begyndelsen på knudeklassifikationen:

For $n = 0$ fås uknuden.

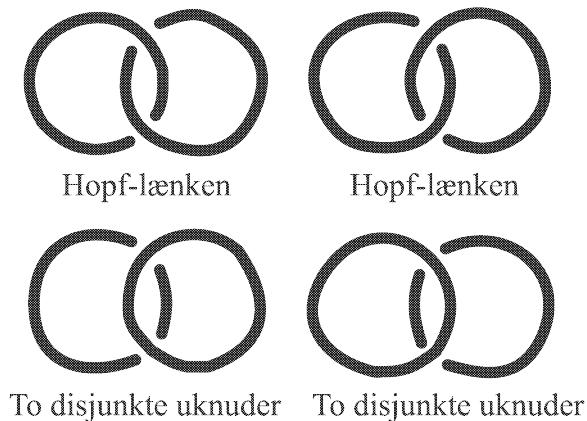
For $n = 1$ er der kun ikke-reducerede diagrammer.

For $n = 2$ fås grafen på figur 31, og da der er 2 krydsninger, kan vi ud fra dette diagram lave $2^2 = 4$ knudediagrammer, som vist på figur 32. Disse er enten Hopf-lænken eller to disjunkte uknuder.

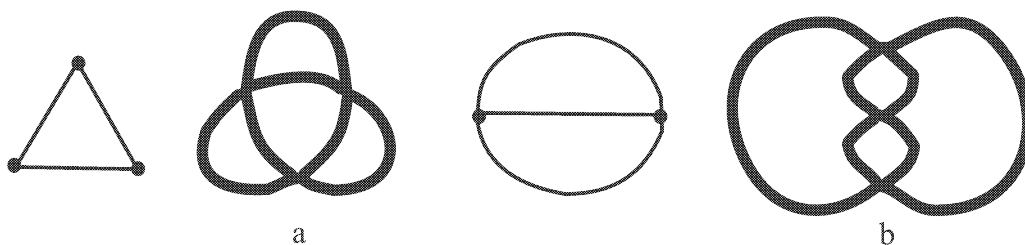


Figur 31:

For $n = 3$ findes kun to grafer, og man får i alt 16 knudediagrammer — se figur 33. Projektionen a) giver trekløverknuden 2 gange og uknuden 6 gange. Projektionen b) giver de samme knuder.



Figur 32:



Figur 33:

For $n = 4$ er der 4 grafer, som på figur 34. Udover de allestedsnærværende uknuder fås lænken 4_1^2 og Hopf-lænken i projektionerne a) og c), de sammensatte lænker $0_1^2 \amalg 0_1^2$ og $2_1^2 \amalg 0_1^2$ i projektion b), og ottetalsknuden og trekløverknuden i projektion d).

Man har opnået en fuldstændig klassifikation af primknuderne med op til krydstallet 15. Her er det interessant at betragte antallet af disse primknuder:

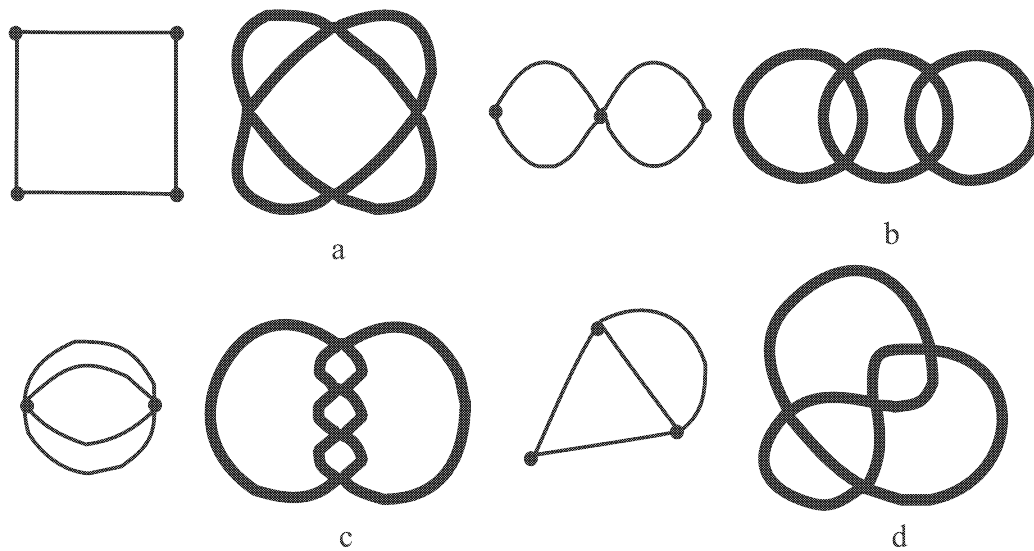
n	0	3	4	5	6	7	8
antal	1	1	1	2	3	7	21
n	9	10	11	12	13	14	15
antal	49	165	552	2176	9988	46972	253293

I ovenstående tabel skelnes der ikke mellem en knude og dens spejlbillede. Man kan vise, at antallet af primknuder med krydstal c vokser tilnærmelsesvist eksponentielt med c , så det er en nærmest umulig opgave at fortsætte denne klassifikation — i hvert tilfælde med de kendte metoder.

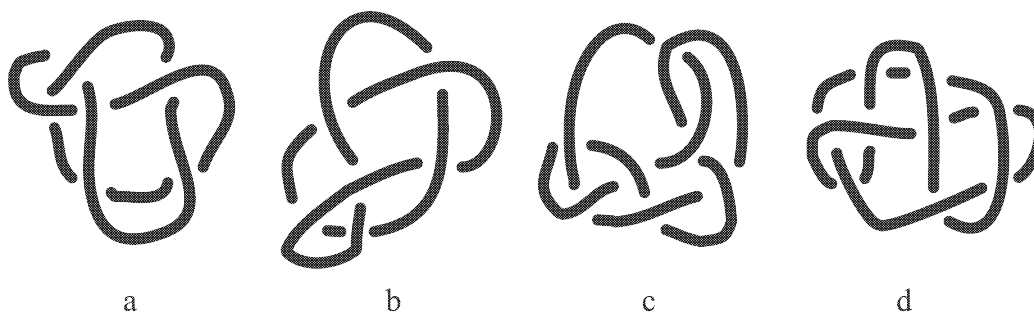
Bestem krydstallet for knuderne på figur 35.

Bevis, at hvis K og L er to knuder, så gælder

$$c(K\#L) \leq c(K) + c(L)$$



Figur 34:



Figur 35:

Vink: Splejs de to minimale diagrammer for K og L .

Hvilken knude fik vi frem til sidst i figur 29?

Tegn graferne for knuderne 5_1 , 5_2 og lænken 5_1^2 .

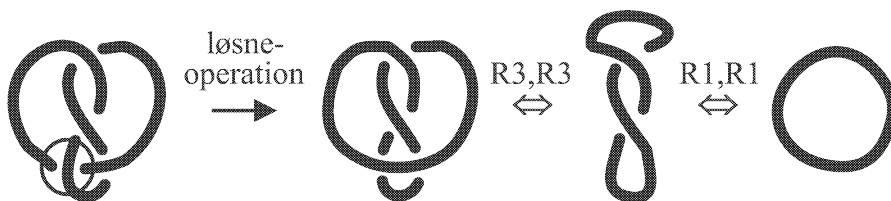
Fortsæt knudeklassifikationen: Hvor mange knuder og lænker findes der med krydstallet 5?

7 Løsnetallet

Vi skal betragte en anden invariant, *løsnetallet*. Denne er et mål for, hvor langt en knude er fra at være uknuden:

Definition 9 Lad K være en knude. *Løsnetallet* for K , $u(K)$, defineres som det mindste antal krydsninger, man skal ændre i et diagram for K , således at det ændrede diagram bliver isotop med uknuden. \square

For eksempel er løsnetallet for ottetalsknuden 1. Dette kan ses ved at betragte standarddiagrammet for denne knude i figur 36. Ændrer man krydsningen i cirklen på det første diagram fås et nyt diagram. Vha. de viste Reidemeistertræk ses, at dette ændrede diagram er isotopt med uknuden. Vi kan heraf konkludere, at $u(4_1) \leq 1$, og da kun uknuden kan have løsnetallet 0, ses, at $u(4_1) = 1$.

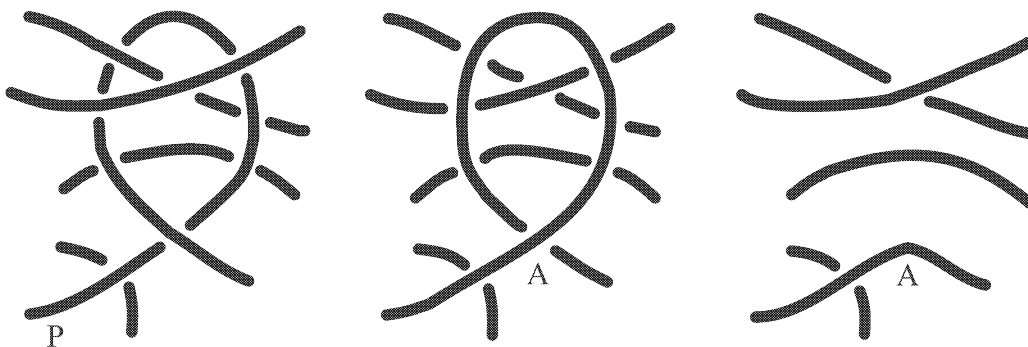


Figur 36:

En sådan ændring af en krydsning kaldes en *løsneoperation*.

Vi bør bevise, at løsnetallet er veldefineret, dvs. at vi i et givet knudediagram altid kan ændre et antal krydsninger, så vi får uknuden:

Theorem 10 *Et knudediagram kan altid løses op ved løsneoperationer.* \square



Figur 37:

Vi begynder i et tilfældigt punkt P i diagrammet — dog ikke i en krydsning — og bevæger os langs snoren, indtil vi kommer tilbage til P .

Første gang, vi støder på en krydsning, ændrer vi den eventuelt, således at den streng, vi i øjeblikket er ved, bliver den øverste streng. Anden gang, vi støder på krydsningen, gør vi ikke noget.

På figur 37 er vist, hvorledes diagrammet til venstre på denne måde ændres til diagrammet i midten.

Vi vil nu vise, at dette nye diagram faktisk er isotopt til uknuden:

Find den første krydsning, hvor snoren er nederst, og kald denne krydsning for A .

Løkken fra A og til A ligger over alle andre strenge i knuden, og vha. Reidemeister-træk 2 og 3 kan den trækkes hen over alle disse strenge. Endelig kan den helt fjernes ved et Reidemeister-træk af type 1, og vi får diagrammet til højre i figur 37.

Vi kan nu gentage denne proces på det nye og simple diagram, indtil vi får uknuden.



Figur 38:

Generelt er det meget svært at finde løsnetalet for en given knude. Et af problemerne er, at løsnetalet ikke nødvendigvis realiseres i et minimalt knudediagram.

Et eksempel på dette er knuden 10_8 på figur 38. Til venstre er vist et minimalt diagram for denne knude — faktisk det eneste minimale diagram. Det er nødvendigt med 3 løsneoperationer for at løse dette diagram op.

Men til højre er vist et diagram for denne knude med 12 krydsninger. Her er det nok med kun 2 løsneoperationer.

Ved brug af avancerede metoder kan man vise, at $u(10_8) = 2$.

Selv for knuder med krydstallet 8 er løsnetalet svært beregneligt. Således kendes løsnetalet for 8_{10} og 8_{16} endnu ikke — men man ved dog, at de begge højst er 2.

Det er ligeledes ukendt, hvorledes løsnetal har det med splejsninger. Man kan nemt bevise, at

$$u(K\#L) \leq u(K) + u(L)$$

men det er et åbent spørgsmål, om der gælder lighedstegn i uligheden.

En vigtig sætning, bevist af Martin Scharlemann i 1985, er

Theorem 11 Hvis en knude K har løsnetalet 1, så er K en primknude. \square

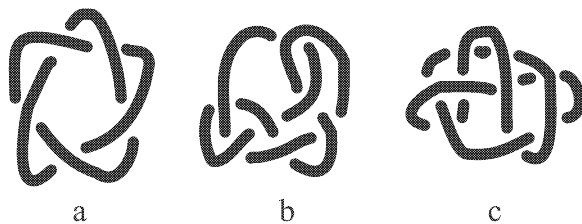
Vi vil ikke bevise denne sætning — beviset fylder nemlig 18 sider!

Værdien af denne sætning er, at vi straks kan se, at 3_1 , 4_1 og en hel del andre knuder faktisk er primknuder.

I denne opgave skal vi kigge nærmere på de to knudediagrammer i figur 38.

- Vis, at knudediagrammet til venstre i figuren er et minimalt diagram.
- Find tre løsneoperationer, som løser knudediagrammet til venstre op.
- Find to løsneoperationer, som løser knudediagrammet til højre op.

Bestem løsnetalet for knuderne på figur 39.



Figur 39:

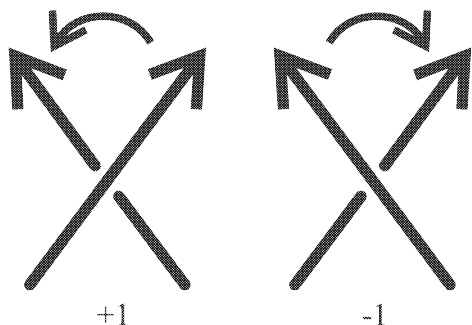
Man kan definere løsnetalet for en lænke med k komponenter som det minimale antal løsneoperationer, der laver lænken om til k disjunkte uknuder.

Bestem løsnetalet for lænkerne 0_1^2 , 2_1^2 , 4_1^2 , 5_1^2 og 6_2^3 .

Bestem løsnetalet for kællingeknuden og råbåndsknabet.

8 Vridtal og l enketal

Vi vil nu se på nogle relativt simple størrelser, nemlig *vridtallet* og *l enketallet*. Det viser sig, at vridtallet spiller en stor rolle i forbindelse med Jones-polynomiet.

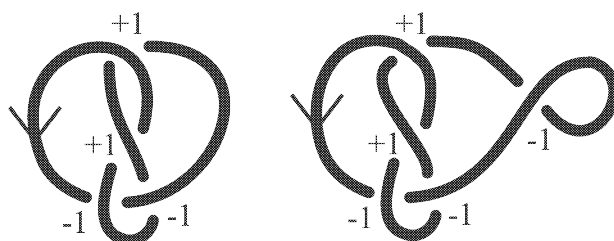


Begge disse størrelser bygger på *fortegnet* for en krydsning. Vi betragter en orienteret knude (eller l enke), og tildeler til hver krydsning et af tallene $+1$ eller -1 efter følgende regel: Hvis den øverste streng skal drejes i positiv omløbsretning (dvs. imod uret) over i den nederste streng, tildeles krydsningen $+1$, ellers tildeles den -1 . Se figur 40.

Figur 40:

Definition 10 Vridtallet, $w(K)$, for det orienterede knudediagram K defineres som summen af fortegnene for alle krydsningerne i K . \square

Et eksempel: De to diagrammer for ottetalsknuden på figur 41 har vridtallene 0 henholdsvis -1 .



Figur 41:

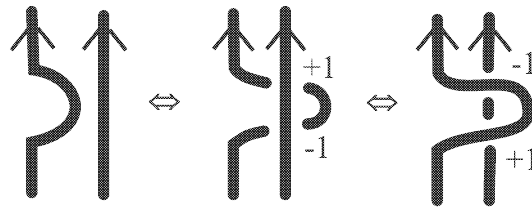
Allerede her ser vi det største problem med vridtallet:

Theorem 12 *Vridtallet er uændret under Reidemeister-tr ek af type 0, 2 og 3, men ikke under tr ek af type 1. Vridtallet er altså **ikke** en invariant.* \square

Reidemeister-tr ek af type 0 tilføjer eller fjerner ikke nogen krydsninger, og kan derfor ikke ændre på vridtallet.

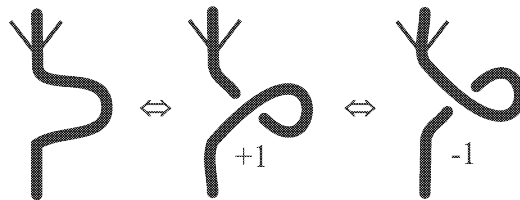
Reidemeister-tr ek af type 2 tilføjer eller fjerner to krydsninger. Disse to krydsninger har dog altid modsat fortegn, som det ses på figur 42. Summen af disse fortegn er derfor uændret

Vi udelader detaljerne ved Reidemeister-tr ek af type 3, da der er mange forskellige tilfælde, men i virkeligheden sker der blot det, at vi flytter to krydsninger uden at ændre deres fortegn.



Figur 42:

Endelig kommer vi til problembarnet — Reidemeister-træk af type 1. På figur 43 ses, at laver man en løkke, så ændres vridtallet med enten $+1$ eller -1 . Vridtallet er altså ikke en invariant.



Figur 43:

Ganske vist er vridtallet ikke en invariant, men Little antog alligevel i 1898, at vridtallet for to forskellige, minimale diagrammer af den samme knude var det samme. Det var derfor, han mente, at de to knuder fra figur 12 ikke var isotope: De to diagrammer har nemlig et forskelligt vridtal. Desværre tog Little fejl. Se opgave 8.3.

For at få en rigtig invariant ud af vridtallet må vi på en eller anden måde komme uden om problemet med Reidemeister-trækkene af type 1.

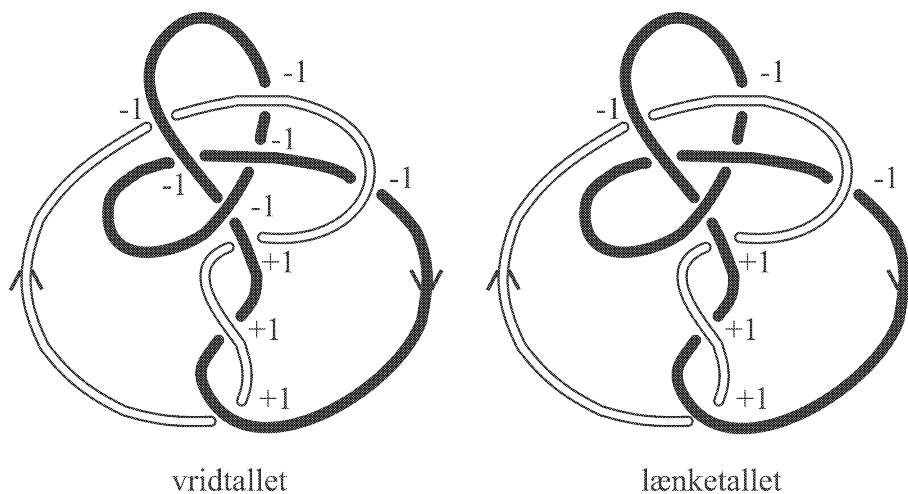
Dette problem er løst i definitionen af *lænketallet*. Denne størrelse er kun defineret for orienterede lænker med to komponenter:

Definition 11 *Lænketallet*, $l(L)$, for lænken L med to komponenter defineres som summen af fortegnene for de krydsninger, hvor den ene komponent krydser den anden. □

Forskellen mellem vridtallet og lænketallet er vist på figur 44. På denne figur ses en 2-komponent-lænke, hvor den ene komponent er farvet hvid. I midten af lænken er der tre krydsninger mellem den sorte komponent og sig selv, og i modsætning til vridtallet skal fortegnene for disse krydsninger ikke tælles med i lænketallet. Vi finder, at vridtallet for lænken bliver $w(L) = -3$, mens lænketallet er $l(L) = 0$.

I opgave 13.2 bevises det, at lænketallet altid er et lige tal.

Theorem 13 *Lænketallet er en invariant.* □



Figur 44:

Beviset forløber på næsten samme måde som i sætning 22, dog er der ændringer ved Reidemeister-træk af type 1:

Ved disse træk laver man nemlig en ny krydsning mellem den ene snor og sig selv. Men fortegnet for denne nye krydsning er fuldstændigt irrelevant ved beregningen af lænketallet, så lænketallet er også uændret under Reidemeister-træk af type 1.

Som altid, når man har at gøre med størrelser, som er defineret på orienterede lænker, bør vi gøre os klart, hvad der sker, når vi ændrer på orienteringen. For en knude (altså en lænke med én komponent) vil fortegnet for alle krydsningerne, og dermed vridtallet, være uændret, hvis man ændrer orienteringen. For en lænke vil vridtallet ændres vilkårligt, hvis man ændrer orienteringen på bare en af komponenterne — krydsningerne mellem forskellige komponenter ændrer fortegn, mens krydsninger mellem den samme komponent er uændrede. Endnu en gang ses, at vridtallet er en noget ubehagelig størrelse. For lænketallets vedkommende gælder, at ændrer vi orienteringen af en af komponenterne, så ændrer alle krydsningerne mellem forskellige komponenter fortegn, og lænketallet ændrer derfor også fortegn.

Bestem vridtallet for lænken på figur 44, efter at orienteringen af den hvide komponent er ændret. Find tilsvarende vridtallet, efter at den sorte komponent har ændret orientering. Konklusion?

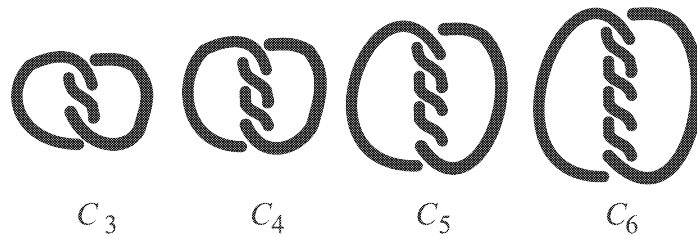
Vælg en orientering og bestem lænketallet for lænkerne 0_1^2 , 2_1^2 , 4_1^2 og 5_1^2 .

Bestem vridtallet for de to knudediagrammer på figur 12.

Vis, at hvis man ændret orienteringen af en af komponenter i en lænke med to komponenter, så ændrer lænketallet fortegn.

En vigtig familie af knuder er de såkaldte *kløver-knuder*, C_n , hvor n er et positivt, helt tal. Nogle af kløverknuderne er vist på figur 45.

- a) Gør rede for, at for n ulige er C_n en knude, mens C_n er en lænke for lige værdier af n .



Figur 45:

- b) Gør rede for, at C_n er alternerende, og bestem $c(C_n)$.
- c) Identificér $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ og C_7 .
- d) Tegn grafen for C_n .
- e) Vis, at for n lige er $l(C_n) = \pm n$.
- f) Bestem vridtallet for C_n .
- g) Vis vha. induktion, at når n er ulige, så er $u(C_n) = \frac{n-1}{2}$, og bestem løsnertallet for C_n , når n er lige.

Lad L^* være spejlbilledet af lænken L . Vis, at $w(L^*) = -w(L)$.

9 Jones-polynomiet

Jones-polynomiet, knudeteoriens superstar, blev opfundet i 1984 af den new zealandske matematiker Vaughan Jones — nærmest ud af den blå luft. Jones arbejdede med de såkaldte *operatoralgebraer*, som er en avanceret form for differentiaalligninger. Under sit arbejde opdagede Jones en sammenhæng mellem størrelser, der mindede om *garnnøgle-relationen* for det allerede kendte *Conway-polynomium* (jvf. kapitel 14). Jones definerede herefter Jones-polynomiet ved at modificere definitionen for Conway-polynomiet.

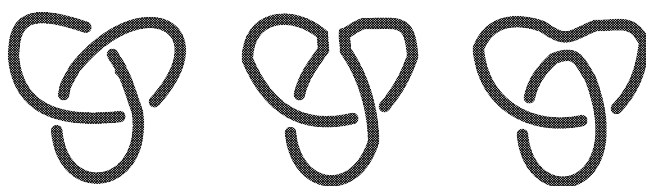
Vi vil ikke bruge Jones' definition her, da den er relativt kompliceret. I stedet vil vi indføre Jones-polynomiet på den måde, amerikaneren Louis Kauffman opfandt i 1985.

Kauffman starter med at definere *Kauffman-polynomiet*, $P(L)$, på, som vi skal se, en ganske naturlig måde. Denne størrelse er desværre ikke en invariant under Reidemeister-træk af type 1 (men nok under type 0, 2 og 3). Vi er derfor nødt til at definere en ny størrelse, $\hat{P}(L)$ (læses 'P hat'), som faktisk er en invariant. Ud fra $\hat{P}(L)$ er det nu en smal sag at få Jones-polynomiet, $V(L)$, frem.

Alle disse størrelser kaldes nok polynomier, men det er en sandhed med modifikation. Kauffman-polynomierne, $P(L)$ og $\hat{P}(L)$, er funktioner af variabelen A , men der kan godt optræde negative potenser af A — således er $P(2_1^2) = -A^4 - A^{-4}$.

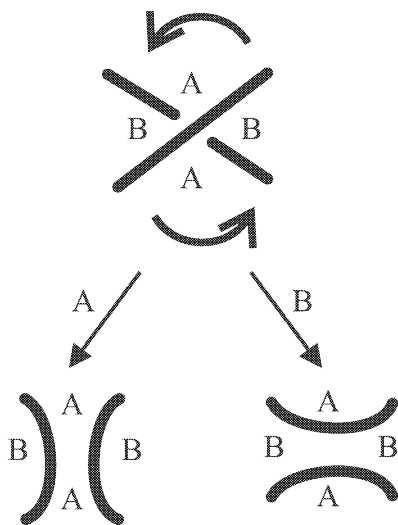
Jones-polynomiet er en funktion af variabelen t , men her kan der optræde både negative og halvtallige potenser af t , f.eks. $V(2_1^2) = -t^{-5/2} - t^{-1/2}$.

Endelig bør vi nævne, at $P(L)$ er defineret for uorienterede knudediagrammer, mens både $\hat{P}(L)$ og $V(L)$ er defineret for orienterede knudediagrammer.



Figur 46:

Ideen bag definitionen af Kauffman-polynomiet er at tage et knudediagram og vælge en tilfældig krydsning. Denne krydsning kan 'kortslettes' på to forskellige måder, som i figur 46, hvor vi ændrer på den øverste krydsning. Man får herved to diagrammer med et færre antal krydsninger. Denne proces kan gentages, indtil man får så simple knudediagrammer, at Kauffman-polynomierne af disse kendes. Herefter kan Kauffman-polynomiet for det oprindelige diagram beregnes.



Figur 47:

En krydsning kan 'kortslettes' eller *splittes* på to forskellige måder, en *A-splitning* og en *B-splitning*. Proceduren er vist på figur 47: Vi tager den øverste streng i krydsningen og drejer den i positiv omløbsretning (dvs. imod uret), således at den ender oveni den nederste streng. I de to områder, som den øverste streng overstryger, skriver vi bogstavet A, og i de to andre områder skriver vi et B.

A-splitningen foretages nu ved at skære krydsningen op og lime snorenderne sammen igen, således at de to A-områder forenes. Tilsvarende forener man de to B-områder i B-splitningen.

Generelt vil vi bruge følgende notation: Hvis L er et knudediagram, så betegner L_A diagrammet efter én A-splitning og

L_B diagrammet efter én B-splitning. Notationen kan udvides — f.eks. er L_{ABB} diagrammet efter en A- og to B-splitninger. Denne notation er naturligvis ikke særligt præcis, da vi ikke angiver, hvilke krydsninger vi har splittet. Derfor vil notationen kun blive brugt i forbindelse med tegninger af diagrammer.

Vi skal nu finde nogle regneregler for Kauffman-polynomiet, $P(L)$. Disse regneregler skal sikre, at vi kan beregne $P(L)$ for et vilkårligt knudediagram L ved at splitte alle krydsningerne og herved få nye knudediagrammer med kendte Kauffman-polynomier. Endelig kræver vi, at $P(L)$ skal være uændret under de forskellige Reidemeister-træk.

Da vi skal begynde et sted, er vi nødt til at kende Kauffman-polynomiet for uknuden. Da uknuden U er den simpleste knude, sætter vi $P(U) = 1$.

Endvidere skal vi have en formel, som fortæller os, hvordan vi kan beregne $P(L)$ for knudediagrammet L , når vi kender $P(L_A)$ og $P(L_B)$ for de splittede diagrammer L_A og L_B . Vi vælger udtrykket

$$P(L) = A \cdot P(L_A) + B \cdot P(L_B)$$

hvor faktorerne A og B indtil videre er ukendte symboler. Vi skal senere finde ud af, hvad A og B egentlig dækker over.

I denne formel er der gemt en nyttig huskeregel: Når man laver et A-split, skal man gange med A ; når man laver et B-split, så skal man gange med B .

Endelig vil vores splitningsprocedure uundgåeligt efterlade 'restprodukter' i form af løsrevne uknuder. For at komme af med disse indfører vi den tredje og sidste regneregul med endnu en ukendt størrelse, C :

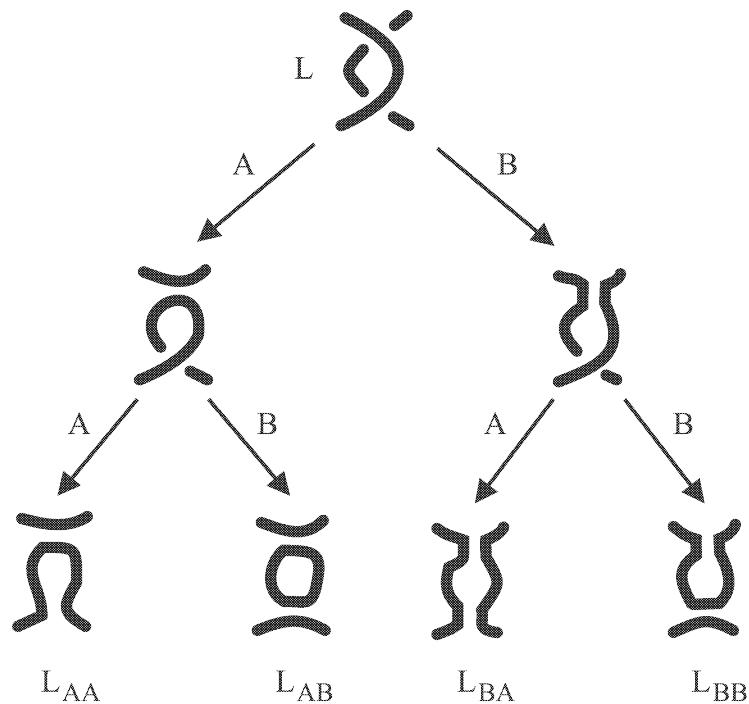
$$P(L \amalg U) = C \cdot P(L)$$

Lad os opsummere vores regler for Kauffman-polynomiet:

- (1) $P(U) = 1$
- (2) $P(L) = A \cdot P(L_A) + B \cdot P(L_B)$
- (3) $P(L \amalg U) = C \cdot P(U)$

Vi mangler at bestemme A , B og C . Disse størrelser skal nu fastlægges ud fra kravet om, at Kauffman-polynomiet er uændret under de forskellige Reidemeister-træk.

Vi begynder med Reidemeister-træk af type 2:



Figur 48:

På figur 48 er vist en del af en lænke L , lige før vi kan udføre et Reidemeister-træk af type 2. Vi splitter begge krydsningerne, og får de fire lænker, L_{AA} , L_{AB} , L_{BA} og L_{BB} .

Bemærk, at L og L_{BA} er isotope. Ligeledes er $L_{AA} = L_{BB}$ og $L_{AB} = L_{AA} \amalg U$. Vi anvender nu regel (2) to gange og regel (3) en gang, og får

$$\begin{aligned}
 P(L) &= A \cdot P(L_A) + B \cdot P(L_B) \\
 &= A(A \cdot P(L_{AA}) + B \cdot P(L_{AB})) + B(A \cdot P(L_{BA}) + B \cdot P(L_{BB})) \\
 &= A^2 \cdot P(L_{AA}) + AB \cdot P(L_{AB}) + BA \cdot P(L_{BA}) + B^2 \cdot P(L_{BB}) \\
 &= A^2 \cdot P(L_{AA}) + AB \cdot P(L_{AA} \amalg U) + BA \cdot P(L) + B^2 \cdot P(L_{AA}) \\
 &= A^2 \cdot P(L_{AA}) + ABC \cdot P(L_{AA}) + BA \cdot P(L) + B^2 \cdot P(L_{AA}) \\
 &= (A^2 + ABC + B^2) \cdot P(L_{AA}) + AB \cdot P(L)
 \end{aligned}$$

Vi ender altså med ligningen

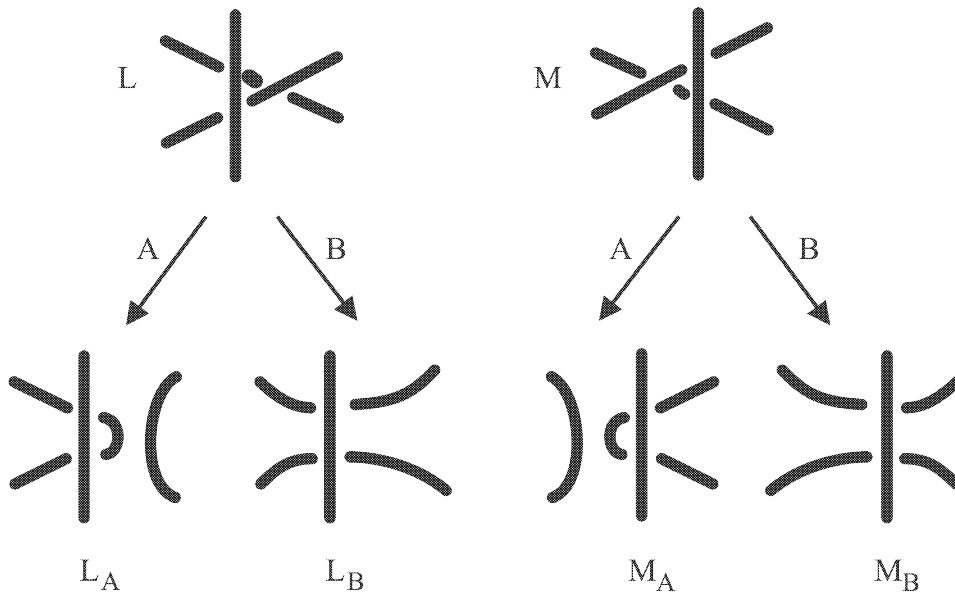
$$P(L) = (A^2 + ABC + B^2) \cdot P(L_{AA}) + AB \cdot P(L)$$

Men dette kan kun lade sig gøre, hvis $AB = 1$ og $A^2 + ABC + B^2 = 0$. Isolerer vi B og C , så fås $B = A^{-1}$ og $C = -A^2 - B^2 = -A^2 - A^{-2}$.

Formlerne for Kauffman-polynomiet kan nu skrives som

- (1) $P(U) = 1$
- (2) $P(L) = A \cdot P(L_A) + A^{-1} \cdot P(L_B)$
- (3) $P(L \amalg U) = (-A^2 - A^{-2}) \cdot P(U)$

Lad os nu se på Reidemeister-træk af type 3:



Figur 49:

Vi betragter en lænke og kalder den L før og M efter Reidemeister-trækket. Begge lænker splittes i en af krydsningerne, og vi får situationen på figur 49. Vi ser, at $L_B = M_B$, og endvidere, at $P(L_A) = P(M_A)$, da L_A og M_A kun adskiller sig fra hinanden ved to Reidemeister-træk af type 2, og vi netop har bevist, at Kauffman-polynomiet er uændret under disse træk.

Vi anvender nu regel (2):

$$\begin{aligned} P(L) &= A \cdot P(L_A) + A^{-1} \cdot P(L_B) \\ &= A \cdot P(M_A) + A^{-1} \cdot P(M_B) = P(M) \end{aligned}$$

Kauffman-polynomiet er altså uændret under Reidemeister-træk af type 3.

Inden vi går i gang med Reidemeister-træk af type 1, er det nok en god ide at tage et hurtigt overblik over, hvad vi har opnået indtil videre:

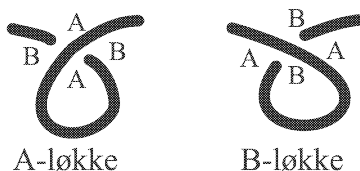
Theorem 14 *Kauffman-polynomiet, $P(K)$, defineres ved formlerne*

- (1) $P(U) = 1$
- (2) $P(L) = A \cdot P(L_A) + A^{-1} \cdot P(L_B)$
- (3) $P(L \amalg U) = (-A^2 - A^{-2}) \cdot P(U)$

Denne størrelse er uændret under Reidemeister-træk af type 0, 2 og 3. □

For at studere Reidemeister-træk af type 1 får vi brug for følgende definition:

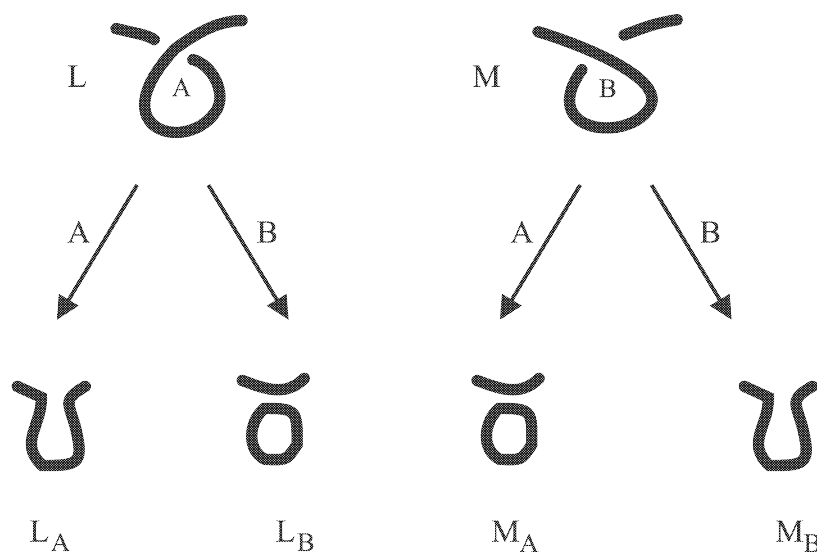
Definition 12 En løkke i et knudediagram kaldes en *A-løkke*, hvis området inden i løkken er et A-område. Løkken er en *B-løkke*, hvis det indre område er et B-område. Se figur 50. □



Figur 50:

Vi indfører notationen K^A for knuden K , hvorpå vi har slået en A-løkke. Tilsvarende er K^B en knude, hvorpå vi slår en B-løkke.

Theorem 15 $P(K^A) = -A^{-3} \cdot P(K)$ og $P(K^B) = -A^3 \cdot P(K)$ □



Figur 51:

Betragt figur 51, hvor vi betegner K^A med L og K^B med M . Vi ser, at $L_A = M_B = K$ og $L_B = M_A = K \amalg U$. Anvendelse af formelen (2) giver nu

$$\begin{aligned}
P(K^A) = P(L) &= A \cdot P(L_A) + A^{-1} \cdot P(L_B) \\
&= A \cdot P(K) + A^{-1} \cdot P(K \amalg U) \\
&= A \cdot P(K) + A^{-1} \cdot (-A^2 - A^{-2} \cdot P(K)) \\
&= A \cdot P(K) - A \cdot P(K) - A^{-3} \cdot P(K) \\
&= -A^{-3} \cdot P(K)
\end{aligned}$$

Tilsvarende fås

$$\begin{aligned}
P(K^B) = P(M) &= A \cdot P(M_A) + A^{-1} \cdot P(M_B) \\
&= A \cdot P(K \amalg U) + A^{-1} \cdot P(K) \\
&= A \cdot (-A^2 - A^{-2} \cdot P(K)) + A^{-1} P(K) \\
&= -A^3 \cdot P(K) - A^{-1} \cdot P(K) + A^{-1} \cdot P(K) \\
&= -A^3 \cdot P(K)
\end{aligned}$$

Dette er ret uheldigt, fordi Kauffman-polynomiet ikke er en invariant. Men vi kan redde situationen ved at definere $\hat{P}(K)$. Dette gøres ved at korrigere Kauffman-polynomiet med en størrelse, som udviser en tilsvarende adfærd under de forskellige typer Reidemeister-træk, nemlig vridtallet.

Theorem 16 *Størrelsen $\hat{P}(K) = (-A^3)^{-w(K)} \cdot P(K)$ er en invariant. Det forudsættes, at K er en orienteret lænke.* \square

Idet både $P(K)$ og $w(K)$ er uændrede under Reidemeister-træk af type 0, 2 og 3, er kombinationen $\hat{P}(K)$ det også.

For Reidemeister-træk af type 1 skal vi undersøge sagen nøjere. Vi nøjes med at se, hvad der sker, når vi slår en A-løkke, idet tilfældet med en B-løkke er ganske analogt.

Slår vi en A-løkke på knuden, så ganges $P(K)$ med $-A^{-3}$. Men tilsvarende ændres vridtallet med -1 , dvs. $w(K^A) = w(K) - 1$. Heraf ses, at

$$\begin{aligned}
\hat{P}(K^A) &= (-A^3)^{-w(K^A)} \cdot P(K^A) \\
&= (-A^3)^{-(w(K)-1)} \cdot (-A^{-3}) \cdot P(K) \\
&= (-A^3)^{-w(K)+1} \cdot (-A^{-3}) \cdot P(K) \\
&= (-A^3)^{-w(K)} \cdot (-A^3) \cdot (-A^{-3}) \cdot P(K) \\
&= (-A^3)^{-w(K)} \cdot P(K) = \hat{P}(K)
\end{aligned}$$

I Jones' oprindelige definition af Jones-polynomiet var dette en funktion af variabelen t . For at få overensstemmelse med denne definition, skal vi af med variabelen A i $\hat{P}(K)$:

Definition 13 *Jones-polynomiet*, $V(L)$, til den orienterede lænke L , fås ved at erstatte A i $\hat{P}(L)$ med $t^{-1/4}$. \square

I næste kapitel vil vi beregne Kauffman- og Jones-polynomiet for konkrete knuder og lænker.

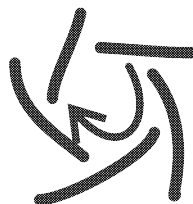
Fuldfør beviset for sætning 28.

'Tomat-skruen' S_n er vist på figur 52. Det er en uknude, hvorpå der er lavet n B-løkker.

Vis, at $P(S_n) = (-A)^{3n}$ og bestem $V(S_n)$.



S_4
Figur 52:



Figur 53:

Resultatet af denne opgave skal bruges i kapitel 12.

- Tildel A- og B-områder for alle krydsningerne knudediagrammerne for 3_1 og 4_1 . Bemærk, at vi får rene A- og rene B-regioner.
- Find et diagram for en ikke-alternerende knude og lav det samme. Får vi igen rene regioner?
- Bevis, at vi i et alternerende diagram kan opdele regionerne i rene A- og B-regioner. (Vink: Figur 53.)

10 Beregning af Kauffman-polynomiet

Vi skal nu se på, hvorledes man kan beregne Kauffman- og Jones-polynomier i praksis. Vi vil demonstrere flere forskellige metoder, hvoraf nogle er mere effektive end andre. I dette kapitel handler det om Kauffman-polynomiet, mens Jones-polynomiet undersøges i kapitel 11.

De simpleste diagrammer er dem uden krydsninger. Et sådant diagram må nødvendigvis være den disjunkte forening af nogle uknuder. Kauffman-polynomiet for disse diagrammer er beregnet i følgende sætning:

Theorem 17 *Lad nU være den disjunkte forening af n uknuder. Så gælder, at*

$$P(nU) = (-A^2 - A^{-2})^{n-1}$$

Denne sætning følger let af regel (1) og gentagen anvendelse af regel (3) i sætning 25.

Den simpleste metode til at beregne Kauffman-polynomiet er at tage knude-diagrammet og lave splitninger af alle krydsningerne.

På figur 54 er Hopf-lænkens krydsninger blevet splittet. Vi opnår i sidste ende de fire lænker L_{AA} , L_{AB} , L_{BA} og L_{BB} ud fra Hopf-lænken L . Da alle krydsningerne er blevet splittet, består disse fire diagrammer kun af disjunkte uknuder.

I det følgende skriver vi B i stedet for A^{-1} — det gør beregningerne mere overskuelige.

$$\begin{aligned} P(L) &= A \cdot P(L_A) + B \cdot P(L_B) \\ &= A^2 \cdot P(L_{AA}) + AB \cdot P(L_{AB}) + BA \cdot P(L_{BA}) + B^2 \cdot P(L_{BB}) \end{aligned}$$

Nu er $L_{AA} = L_{BB} = 2U$ og $L_{AB} = L_{BA} = U$, og da $B = A^{-1}$, fås

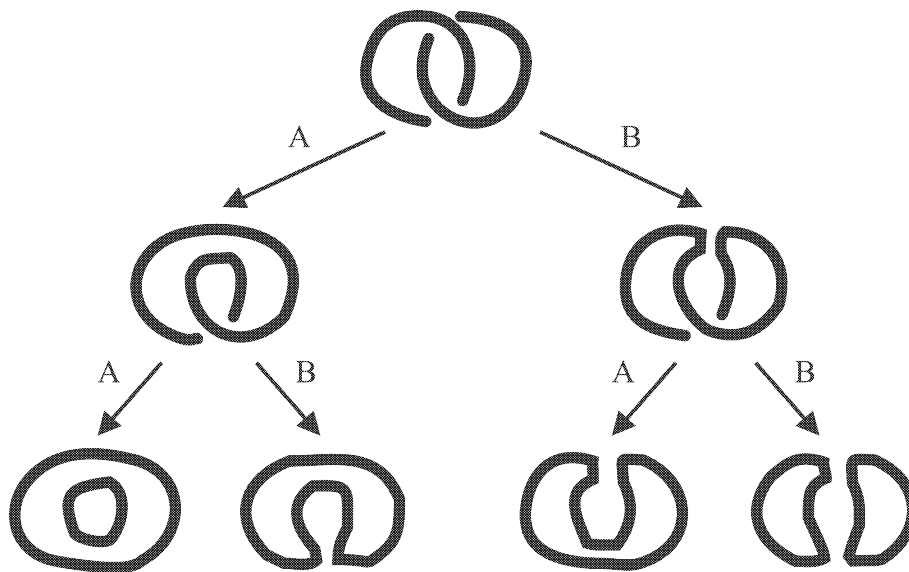
$$\begin{aligned} P(L) &= A^2 \cdot (-A^2 - A^{-2}) + 1 + 1 + A^{-2} \cdot (-A^2 - A^{-2}) \\ &= -A^4 - 1 + 1 + 1 - A^{-4} - 1 = -A^4 - A^{-4} \end{aligned}$$

Dette var en kompliceret beregning, og man kan spare sig en del arbejde ved at bemærke, at der optræder en vis systematisk:

Vi vælger en rækkefølge af de n krydsninger i diagrammet. Disse krydsninger skal nu splittes, og da hver krydsning kan splittes på 2 måder, fås i alt 2^n splittede diagrammer, som hver er den disjunkte forening af uknuder.

Et valg af de n splitninger kan opskrives som en *sekvens*, dvs. en følge S af n bogstaver, som enten er A eller B .

For $n = 2$ er de mulige sekvenser således AA , AB , BA og BB .



Figur 54:

I udregningen af Kauffman-polynomiet for Hopf-lænken endte vi på et tidspunkt med udtrykket

$$AA \cdot P(K_{AA}) + AB \cdot P(K_{AB}) + BA \cdot P(K_{BA}) + BB \cdot P(K_{BB})$$

I denne sum er der netop et led for hver eneste sekvens. Dette led er af formen $A^{a(S)}B^{b(S)}P(K_S)$, hvor $a(S)$ og $b(S)$ betegner antallet af gange, som henholdsvis A og B optræder i sekvensen S . K_S er diagrammet, efter at vi har splittet alle krydsningerne ifølge sekvensen S .

Da vi tager summen over alle mulige sekvenser, og da $B = A^{-1}$, fås altså

$$P(K) = \sum_S A^{a(S)-b(S)} P(K_S)$$

Med $C(S)$ betegner vi antallet af uknuder i det totalt splittede digram L_S . Ifølge sætning 30 er $P(K_S) = (-A^2 - A^{-2})^{C(S)-1}$. Ved indsættelse af dette i formlen opnår vi følgende:

Theorem 18 *Kauffman-polynomiet for knuden K er givet ved*

$$P(K) = \sum_S A^{a(S)-b(S)} \cdot (-A^2 - A^{-2})^{C(S)-1}$$

hvor summen tages over alle mulige sekvenser. □

Der er naturligvis ikke meget nyt i denne sætning i forhold til de tidligere beregninger. Sætningen har derimod stor teoretisk betydning.

Lad os vise, hvorledes vi kan beregne Kauffman-polynomiet af trekløverknuden vha. ovenstående formel:

Vi opskriver alle sekvenser på 3 bogstaver, og for hver af disse splitter vi trekløverknuden på sædvanlig måde. Resultatet er vist på figur 55.

Ovenover hvert diagram står den tilsvarende sekvens, mens antallet af uknuder er skrevet nedenunder.

For $S = AAA$ er $a(S) - b(S) = 3$ og $C(S) = 3$.

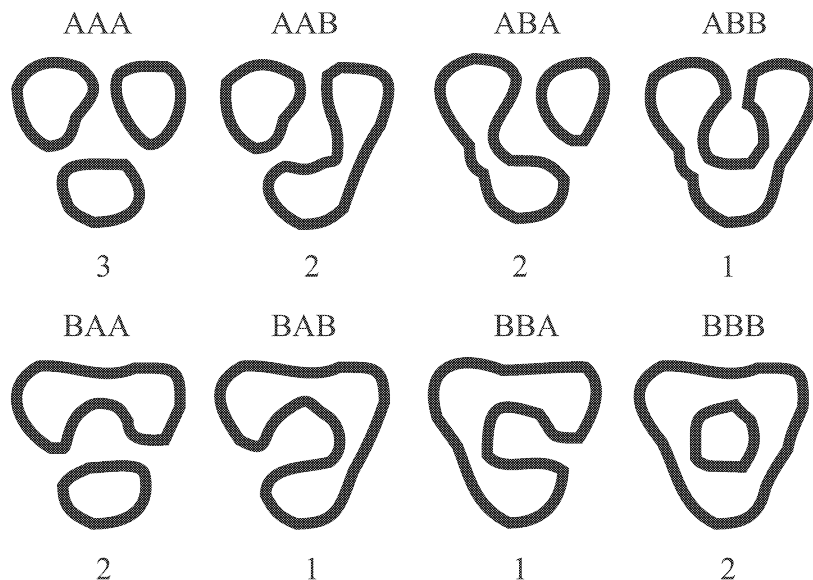
For $S = AAB, ABA$ og BAA er $a(S) - b(S) = 1$ og $C(S) = 2$.

For $S = ABB, BAB$ og BBA er $a(S) - b(S) = -1$ og $C(S) = 1$.

For $S = BBB$ er $a(S) - b(S) = -3$ og $C(S) = 2$.

Derfor fås

$$\begin{aligned} P(K) &= A^3 \cdot (-A^2 - A^{-2})^{3-1} + 3A \cdot (-A^2 - A^{-2})^{2-1} \\ &\quad + 3A^{-1} \cdot (-A^2 - A^{-2})^{1-1} + A^{-3} \cdot (-A^2 - A^{-2})^{2-1} \\ &= A^7 - A^3 - A^{-5} \end{aligned}$$



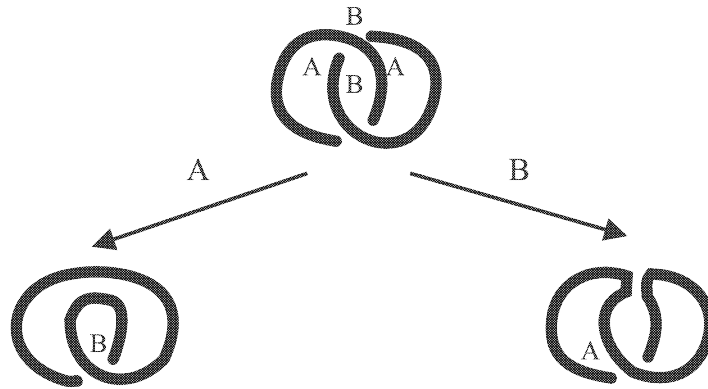
Figur 55:

Man kan i praksis beregne Kauffman-polynomier på en endnu lettere måde. Man anvender en eller to splitninger og bruger sætning 27 til at eliminere eventuelle løkker. Forhåbentlig ender man så med knudediagrammer, hvis Kauffman-polynomier er kendte.

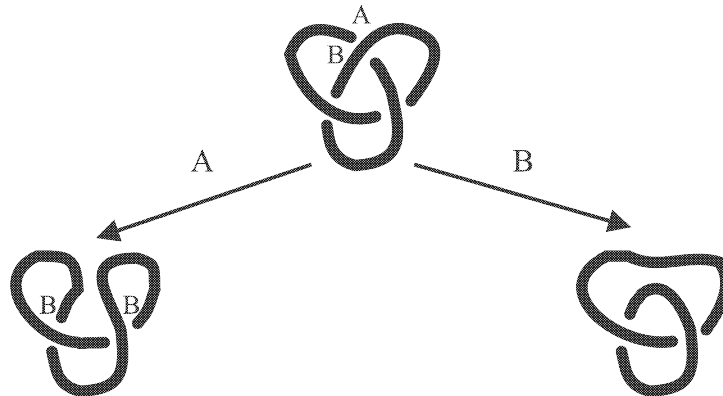
På figur 56 har vi splittet den ene krydsning i Hopf-lænken L . Resultatet er to uknuder — den ene med en B-løkke, den anden med en A-løkke.

Anvender vi sætning 27, fås

$$\begin{aligned} P(L) &= A \cdot P(L_A) + A^{-1} \cdot P(L_B) \\ &= A \cdot (-A^3) \cdot P(U) + A^{-1} \cdot (-A^{-3}) \cdot P(U) \\ &= -A^4 - A^{-4} \end{aligned}$$



Figur 56:



Figur 57:

På figur 57 har vi splittet den ene krydsning i trekløverknuden K . Resultatet er en uknude med to B-løkker og en Hopf-lænke, hvis Kauffman-polynomium vi netop har beregnet. Vi får:

$$\begin{aligned}
 P(K) &= A \cdot P(K_A) + A^{-1} \cdot P(K_B) \\
 &= A \cdot (-A^3)^2 \cdot P(U) + A^{-1} \cdot (-A^4 - A^{-4}) \\
 &= A^7 - A^3 - A^{-5}
 \end{aligned}$$

Bestem Jones-polynomiet af trekløverknuden ud fra sætning 29.

Vis, at Kauffman-polynomiet af trekløverknudens spejlbillede er $A^{-7} - A^{-3} - A^5$, og bestem Jones-polynomiet for denne knude.

Vis, at $P(4_1) = A^8 - A^4 + 1 - A^{-4} + A^{-8}$, og bestem Jones-polynomiet for ottetalsknuden.

Brug sætning 30 til at vise, at $V(nU) = (-t^{1/2} - t^{-1/2})^{n-1}$.

Vis, at $P(4_1^2) = -A^{10} + A^6 - A^2 - A^{-6}$.

Bestem $P(5_1^2)$.

De to næste opgaver skal bruges i beviset for sætning 40.

Gør rede for, at ændrer man et bogstav fra A til B (eller omvendt) i en sekvens S , så enten vokser eller aftager C_S med 1.

Vi betragter et sammenhængende knudediagram K . Vi betegner antallet af uknuder efter splitning efter sekvensen $AAA \dots A$ med C_A . Vi lader endvidere S være en sekvens med ét B . Vi vil sammenligne C_A med C_S .

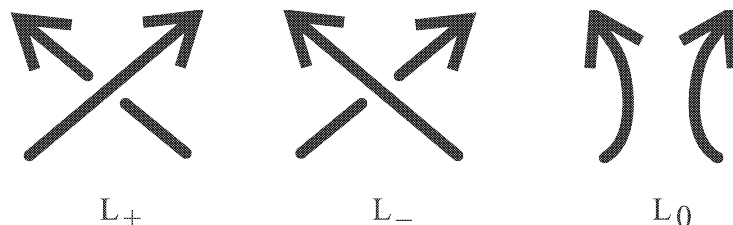
- a) Vælg et tilfældigt ikke-reduceret diagram K . Hvad sker der med C_S , hvis det enlige B -split hører hjemme i den 'ikke-reducerede krydsning'?
- b) Vis, at hvis $C_S = C_A + 1$, så er diagrammet ikke-reduceret.
- c) Vis, at hvis diagrammet er reduceret, så vil $C_S = C_A - 1$.

11 Beregning af Jones-polynomiet

Jones' oprindelige definition anvendte en såkaldt *garnnøgle-relation*. Vi indfører jo ikke Jones-polynomiet på denne måde, så i stedet skal vi bevise denne formel ud fra vores definition. Det viser sig endvidere, at denne formel med fordel kan anvendes til at beregninger.

Vælg en vilkårlig krydsning i en orienteret lænke. Vi kan gøre to ting ved denne krydsning; enten gennemføre en løsneoperation som i kapitel 7, eller *kortslutte* krydsningen.

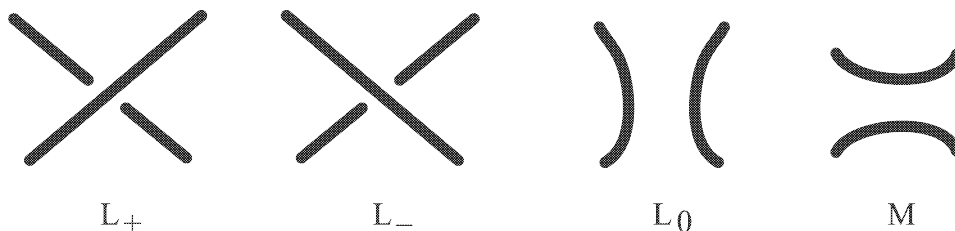
På figur 58 er detaljerne i denne konstruktion vist. Den oprindelige lænke kaldes L_+ eller L_- , alt efter om krydsningen er positiv eller negativ. Ved løsneoperationen får vi L_- fra L_+ og omvendt. Det kortsluttede diagram betegnes L_0 .



Figur 58:

Theorem 19 *Lad L_+ , L_- og L_0 være knudediagrammer som på figur 58. Så gælder*

$$\frac{1}{t} \cdot V(L_+) - t \cdot V(L_-) = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) V(K_0)$$



Figur 59:

Vi starter med at arbejde med Kauffman-polynomiet, og vi glemmer derfor et øjeblik, at lænkerne er orienterede. På figur 59 er vist de tre oprindelige lænker samt en ny, som vi kalder M .

Vi splitter de to lænker L_+ og L_- i den udvalgte krydsning, og man ser, at $L_{+A} = L_{-B} = L_0$ og $L_{+B} = L_{-A} = M$. Dette giver formlerne

$$P(L_+) = A \cdot P(L_0) + A^{-1} \cdot P(M)$$

$$P(L_-) = A \cdot P(M) + A^{-1} \cdot P(L_0)$$

Vi vil gerne eliminere den ubehagelige størrelse $P(M)$. Dette kan gøres ved at gange den første ligning med A og den anden med A^{-1} :

$$A \cdot P(L_+) = A^2 \cdot P(L_0) + P(M)$$

$$A^{-1} \cdot P(L_-) = P(M) + A^{-2} \cdot P(L_0)$$

og derefter trække ligningerne fra hinanden:

$$-A \cdot P(L_+) + A^{-1} \cdot P(L_-) = (A^{-2} - A^2) \cdot P(L_0)$$

Vi skal nu se på vridtallene for de tre lænker: I forhold til L_0 har L_+ en positiv krydsning mere, og derfor gælder, at $w(L_+) = w(L_0) + 1$. Tilsvarende ses, at $w(L_-) = w(L_0) - 1$.

Dette betyder, at

$$(-A^3)^{-w(L_0)} = -A^3 \cdot (-A^3)^{-w(L_+)} = -A^{-3} \cdot (-A^3)^{-w(L_-)}$$

Tager vi ligningen fra før og ganger igennem med $(-A^3)^{-w(L_0)}$, fås ved anvendelse af formlerne ovenfor, at

$$\begin{aligned} -A \cdot (-A^3)^{-w(L_0)} \cdot P(L_+) + A^{-1} \cdot (-A^3)^{-w(L_0)} \cdot P(L_-) = \\ (A^{-2} - A^2) \cdot (-A^3)^{-w(L_0)} \cdot P(L_0) \end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned} A^4 \cdot (-A^3)^{-w(L_+)} \cdot P(L_+) - A^{-4} \cdot (-A^3)^{-w(L_-)} \cdot P(L_-) = \\ (A^{-2} - A^2) \cdot (-A^3)^{-w(L_0)} \cdot P(L_0) \end{aligned}$$

Ud fra definitionen af $\hat{P}(K)$ fås nu ligningen

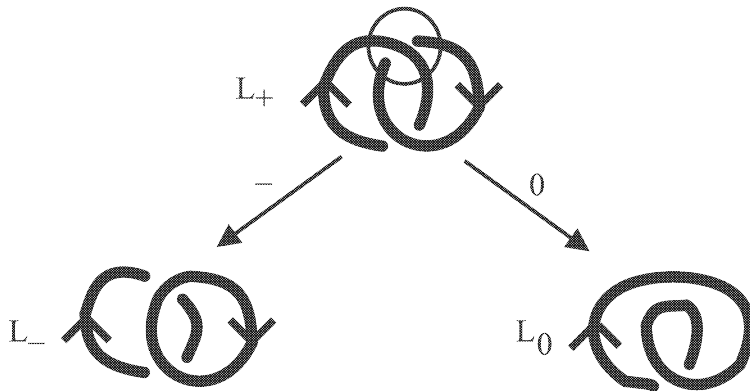
$$A^4 \cdot \hat{P}(L_+) - A^{-4} \cdot \hat{P}(L_-) = (A^{-2} - A^2) \cdot \hat{P}(L_0)$$

Endelig erstatter vi alle forekomster af A med $t^{-1/4}$. Herved laves $\hat{P}(L_+)$ om til $V(L_+)$ og tilsvarende for de andre to lænker, og vi opnår den ønskede formel

Denne formel er meget velegnet til at beregne Jones-polynomier. Dette skyldes, at Jones-polynomiet er en invariant, og at vi derfor umiddelbart kan ignorere de løkker, som optræder igen og igen, når vi splitter.

På figur 60 er vist, hvorledes man kan beregne Jones-polynomiet for den *positive* Hopf-lænke. Lænken kaldes positiv, fordi orienteringen gør vridtallet for lænken positiv, nemlig $+2$.

Vi udvælger den øverste krydsning. Da denne er positiv, kaldes lænken L_+ , og vi konstruerer lænkerne L_- og L_0 . Disse er to disjunkte uknuder henholdsvis uknuden, og vi kender derfor deres Jones-polynomier.

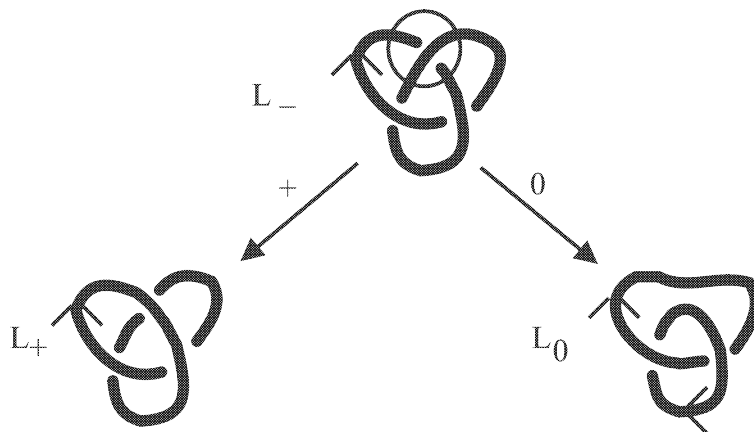


Figur 60:

Sætning 32 giver nu

$$\begin{aligned}
 V(L_+) &= t^2 V(L_-) + (t^{3/2} - t^{1/2}) V(L_0) \\
 &= t^2 \cdot (-t^{1/2} - t^{-1/2}) + (t^{3/2} - t^{1/2}) \cdot 1 \\
 &= -t^{5/2} - t^{3/2} + t^{3/2} - t^{1/2} = -t^{5/2} - t^{1/2}
 \end{aligned}$$

Her er det nok på sin plads at give læseren en advarsel: Den *negative* Hopf-lænke med vridtallet -2 har Jones-polynomiet $-t^{-5/2} - t^{-1/2}$.



Figur 61:

Trekløverknudens Jones-polynomium beregnes vha. figur 61. Bemærk, at L_0 er den negative Hopf-lænke.

$$\begin{aligned}
 V(L_-) &= t^{-2} V(L_+) - (t^{-1/2} - t^{-3/2}) V(L_0) \\
 &= t^{-2} \cdot 1 - (t^{-1/2} - t^{-3/2}) \cdot (-t^{-5/2} - t^{-1/2}) \\
 &= -t^{-1} + t^{-3} - t^{-4}
 \end{aligned}$$

Ved beregninger af denne type er det en god ide med omhu at vælge den krydsning, man angriber med garnnøgle-relationen. I mange tilfælde får man nemlig uknuden, hvis man ændrer en passende krydsning.

Hvordan opfører Jones-polynomiet sig mon under splejsning? Det opfører sig heldigvist pænt — svaret er givet i nedenstående sætning 34. Men for at kunne bevise denne sætning har vi brug for en hjælpesætning:

Theorem 20 *Lad K og L være to orienterede lænker. Så gælder, at*

$$V(K \amalg L) = (-t^{1/2} - t^{-1/2}) \cdot V(K) \cdot V(L)$$

Vi viser først, at $P(K \amalg L) = (-A^2 - A^{-2}) \cdot P(K) \cdot P(L)$:

Lav en opsplitning af alle krydsningerne i lænken L ganske som i sætning 31, men med den forskel, at vi bibeholder lænken K ved siden af det splittede L -diagram. Så fås ifølge regel (3) i sætning 25:

$$\begin{aligned} P(K \amalg L) &= \sum_S A^{a(S)-b(S)} P(K \amalg C(S)U) \\ &= \sum_S A^{a(S)-b(S)} (-A^2 - A^{-2})^{C(S)} P(K) \\ &= (-A^2 - A^{-2}) \cdot P(K) \sum_S A^{a(S)-b(S)} (-A^2 - A^{-2})^{C(S)-1} \\ &= (-A^2 - A^{-2}) \cdot P(K) \cdot P(L) \end{aligned}$$

For at komme fra denne formel til Jones-polynomiet anvender vi nu, at $w(K \amalg L) = w(K) + w(L)$:

$$\begin{aligned} \hat{P}(K \amalg L) &= (-A^3)^{-w(K \amalg L)} \cdot P(K \amalg L) \\ &= (-A^3)^{-w(K)} P(K) \cdot (-A^3)^{-w(L)} P(L) \cdot (-A^2 - A^{-2}) \\ &= (-A^2 - A^{-2}) \cdot \hat{P}(K) \cdot \hat{P}(L) \end{aligned}$$

Erstatter vi nu A med $-t^{-1/4}$ fås sætningen.

Theorem 21 *Lad K og L være lænker. Så gælder, at*

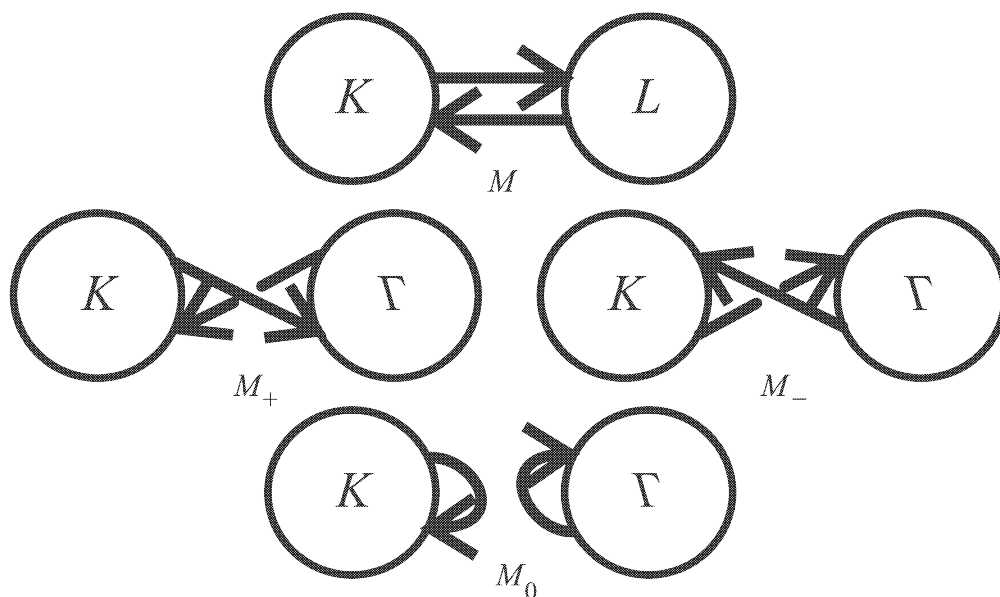
$$V(K \# L) = V(K) \cdot V(L)$$

På figur 62 er vist $M = K \# L$ — de to store cirkler repræsenterer lænkerne K og L . Vi tager L -delen af denne splejsning og vrider den, således at vi får M_+ og M_- . Kortslyttes krydsningen mellem de to lænker, fås M_0 .

Det ses, at $K \# L = M_+ = M_-$ og $K \amalg L = M_0$.

Anvendes relationen fra sætning 32, fås derfor

$$\frac{1}{t} \cdot V(M_+) - t \cdot V(M_-) = (t^{1/2} - t^{-1/2}) \cdot V(M_0)$$



Figur 62:

eller

$$\frac{1}{t} \cdot V(K\#L) - t \cdot V(K\#L) = (t^{1/2} - t^{-1/2}) \cdot V(K \amalg L)$$

Men vi har netop beregnet $V(K \amalg L)$, så derfor

$$\left(\frac{1}{t} - t\right) \cdot V(K\#L) = (t^{1/2} - t^{-1/2}) \cdot (-t^{1/2} - t^{-1/2}) \cdot V(K) \cdot V(L)$$

eller

$$\left(\frac{1}{t} - t\right) \cdot V(K\#L) = \left(\frac{1}{t} - t\right) \cdot V(K) \cdot V(L)$$

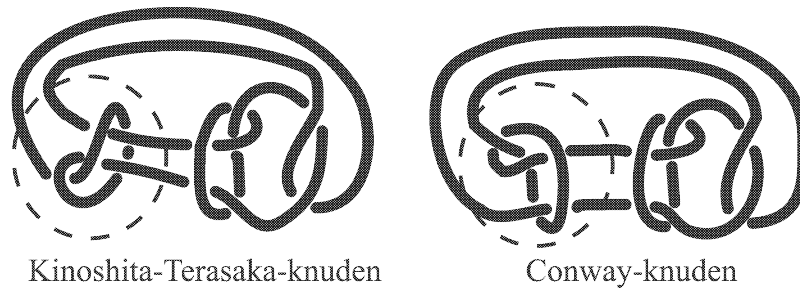
Ved division med $(\frac{1}{t} - t)$ fås sætningen.

Da vi nu har metoder til at beregne Jones-polynomiet for alle mulige knuder, melder spørgsmålene sig: Hvor stærk en invariant er Jones-polynomiet? Skulle det mon være en universel invariant?

Svaret på dette sidste spørgsmål er desværre nej. Ganske vist er Jones-polynomiet en ganske stærk invariant — hermed menes, at har man to ikke-isotope knuder, så er deres Jones-polynomium med stor sandsynlighed forskellige — men der findes eksempler på forskellige knuder med ens Jones-polynomium.

Et af de mest berømte eksempler herpå er vist på figur 63. Knuden til venstre kaldes *Kinoshita-Terasaka-knuden*, mens den til højre er *Conway-knuden*. Disse to knuder har samme Jones-polynomium — se kapitel 16.

De to knuder kaldes for *mutant-knuder*: De to områder indenfor de stiplede cirkler af knudediagrammerne kaldes *kurrer*. Man kan lave knuden til venstre



Figur 63:

om til knuden til højre ved at rotere kurren 180° — en sådan proces kaldes en *mutation*.

Muterede knuder er generelt meget vanskelige at skelne fra hinanden. De har således altid samme Jones-polynomium, og de fleste andre invarianter er heller ikke til megen nytte. De to knuder på figur 63 kan dog skelnes fra hinanden vha. *genus-invarianten* — genus er 2 henholdsvis 3.

Det er et åbent spørgsmål, om uknuden er den eneste knude med Jones-polynomiet 1.

Bestem Jones-polynomiet for den negative Hopf-lænke.

Bestem $V(4_1)$ vha. sætning 32.

Bestem $V(5_1)$ og $V(5_2)$.

Vis, at Jones-polynomiet for trekløverknudens spejlbillede er $t + t^3 - t^4$. Bestem derefter Jones-polynomiet for kællingeknuden og råbåndsknøbet.

I denne opgave skal vi se på et andet eksempel på knuder, hvis Jones-polynomier er ens.

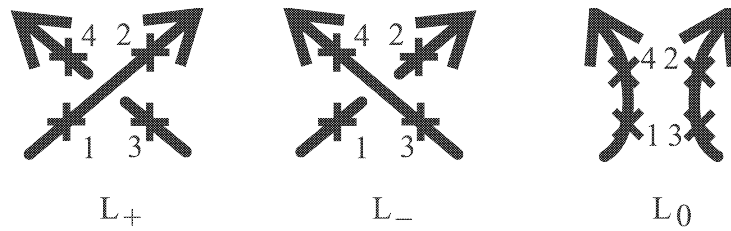
- Bestem Jones-polynomiet for den sammensatte knude $4_1 \# 4_1$.
- Bestem Jones-polynomiet for knuden 8_9 vha. tabellen bag i bogen.
- Svarene på a) og b) kunne forlede én til at tro, at $4_1 \# 4_1 = 8_9$. Men dette er ikke tilfældet: Vis, at den sammensatte knude $4_1 \# 4_1$ har løsnetalet mindst 2, mens 8_9 har løsnetalet 1.

I denne opgave skal vi se på betydningen af værdien af Jones-polynomiet for $t = 1$.

- Brug sætning 32 til at vise, at for en lænke L gælder $V(L_+)(1) = V(L_-)(1)$.
- Vis, at for en knude K gælder, at $V(K)(1) = 1$. (Vink: Brug b) på en sekvens af løsneoperationer, indtil K er løsnet op til uknuden).
- Vis, at hvis L er en lænke med k komponenter, så gælder, at

$$V(L)(1) = (-1)^{k-1}$$

I denne opgave skal vi anvende figur 64.



Figur 64:

- a) Vis, at lænkerne L_+ og L_- har det samme antal komponenter.
- b) Vis, at hvis de to strenge, der 'blandes' ved overgangen fra L_+ til L_0 , tilhører den samme komponent i lænken L_+ , så vil lænken L_0 have en komponent mere.

(Vink: Betragt figur 64. I L_+ kommer punkterne 1,2,3,4 i rækkefølgen $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$. Hvordan bliver denne rækkefølge i L_0 , hvis strengene stadigvæk ligger i samme komponent? Er dette muligt?)

- c) Vis, at hvis de to strenge i L_+ ligger i forskellige komponenter, så smeltes de sammen i L_0 .

12 Jones-polynomiet og krydstallet

Vi skal nu se på den geometriske fortolkning af Jones-polynomiet. Samtidig skal vi bevise Tait's formodning (sætning 17) om, at alternerende, reducerede knudediagrammer er minimale.

Denne formodning blev bevist i 1985 uafhængigt af hinanden af Louis Kauffman, Morwen Thistlethwaite og Kunio Murasugi. Vi vil her gengive Kauffmans bevis.

I øvrigt er det bemærkelsesværdigt, at man fandt tre helt forskellige beviser for Tait's formodning så kort tid efter introduktionen af Jones-polynomiet. Med rette er Jones-polynomiets opdagelse blevet kaldt en revolution indenfor knudeteorien.

Theorem 22 Spændet $\text{span}(F)$ af et polynomium F er forskellen mellem polynomiets højeste grad og laveste grad. \square

Polynomiet $-t^{-2} + 2t^{-1} + 6 + 5t + 3t^2 + 2t^3 + 3t^4$ har spændet $4 - (-2) = 6$. Hovedresultatet i dette kapitel er, at for alternerende knuder er $\text{span}(V(K))$ lig med krydstallet $c(K)$. Dette gælder dog ikke for ikke-alternerende knuder.

Vi vil ikke arbejde direkte med Jones-polynomiet, men i stedet anvende Kauffman-polynomiet. Sammenhængen mellem disse to polynomiers spænd er som følger:

Theorem 23 $\text{span}(P(K)) = 4 \cdot \text{span}(V(K))$ \square

Spændet af $P(K)$ og $\hat{P}(K)$ er ens, idet forskellen på disse polynomier er faktoren $(-A^3)^{-w(K)}$. Men når man ganger med denne faktor, så stiger både den mindste og den største grad med det samme beløb, og forskellen er derfor uændret.

$\text{span}(\hat{P}(K)) = 4 \cdot \text{span}(V(K))$, idet vi jo erstatter alle forekomster af A i $\hat{P}(K)$ med $t^{-1/4}$.

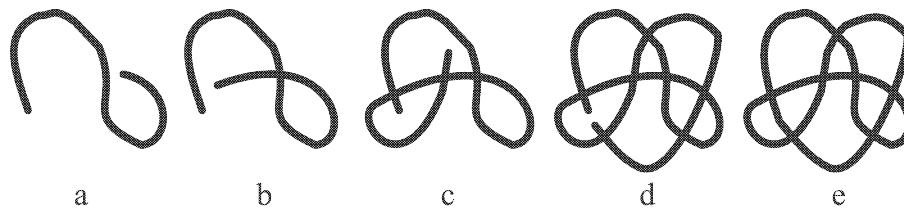
Vi skal nu se på antallet af regioner i et knudediagram.

Theorem 24 I et sammenhængende knudediagram med c krydsninger er der $c + 2$ regioner. \square

På figur 65 er vist, hvorledes man skridtvist tegner en knudeprojektion. Vi starter på med en streg, som ikke krydser sig selv, og én region, nemlig hele planen.

Første gang stregen krydser sig selv, deles planen op i to regioner. Vi har nu én krydsning og to regioner, som på tegning b).

Vi fortsætter, og ved hver krydsning øges antallet af regioner med én — dette sker ved, at en allerede eksisterende region deles i to.



Figur 65:

Lige før vi er færdige har vi c krydsninger og $c + 1$ regioner, som på tegning d). Vi færdiggør knudeprojektion ved at forbinde de to ender af strengen. Herved laves der ikke flere krydsninger, men endnu en region deles op i to. Alt i alt ses, at vi får to regioner mere end antallet af krydsninger.

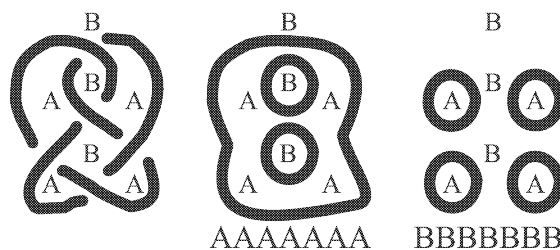
Theorem 25 *Et alternerende knudediagram kan deles op i A- og B-regioner.* □

Se figur 66. Beviset er skitseret i opgave 9.3.

Definition 14 I et knudediagram lader vi C_A betegne antallet af uknuder efter at $AAA \dots A$ -splitningen er gennemført. Tilsvarende betegner C_B antallet af uknuder i $BBB \dots B$ -splitningen. □

Theorem 26 *Lad K være et sammenhængende knudediagram med c krydsninger. Så gælder*

- a) $C_A + C_B \leq c + 2$
- b) *Hvis K er et alternerende diagram, så er $C_A + C_B = c + 2$.*



Figur 66:

Vi vil ikke bevise del a) af sætningen. Det lidt indviklede bevis er via induktion over antallet af krydsninger.

Del b) bevises lettest ved at betragte figur 66. I $AAA \dots A$ -splitningen isoleres alle B-regionerne, og der er en uknude som grænse for hver eneste B-region, inklusive den ydre del af planen. Tilsvarende ses, at $BBB \dots B$ -splitningen isolerer alle A-regionerne. Summen $C_A + C_B$ er derfor lig med antallet af regioner, som igen er lig $c + 2$.

Theorem 27 For et sammenhængende, reduceret knudediagram med c krydsninger er den maksimale grad af Kauffman-polynomiet lig $c + 2C_A - 2$. Den minimale grad er $-c - 2C_B + 2$. \square

Vi nøjes kun med at bevise, at $c + 2C_A - 2$ er den maksimale grad, idet udsagnet om den minimale grad behandles tilsvarende.

For det første betragter vi en sekvens S . I summen i sætning 31 bidrager denne sekvens med leddet $A^{a(S)-b(S)}(-A^2 - A^{-2})^{C(S)-1}$. Ganger man faktoren $(-A^2 - A^{-2})^{C(S)-1}$ ud, så fås højstegradsleddet $(-A^2)^{C(S)-1}$. Tages faktoren $A^{a(S)-b(S)}$ i betragtning, ses, at sekvensen S bidrager med et led af grad $a(S) - b(S) + 2C(S) - 2$, og alle de andre led fra S har mindre grad.

Herefter betragter vi sekvensen $S = AAA \dots A$. Her er $a(S) - b(S) = c - 0 = c$ og $C(S) = C_A$, så denne sekvens giver altså et led med grad $c + 2C_A - 2$.

De andre sekvenser ikke kan bidrage med led med større grad end dette: Ændrer man et A til et B i en sekvens, så falder størrelsen $a(S) - b(S)$ med 2, da $a(S)$ aftager med én og $b(S)$ vokser med én. Desuden vil denne ændring højst involvere en krydsning, og derfor vil antallet af uknuder enten vokse med én (en uknude deles i to) eller aftage med én (to uknuder smelter sammen) – se opgave 10.7. Alt i alt vil ændring af et A til et B betyde, at $a(S) - b(S) + 2C(S) - 2$ er konstant eller aftager med 4.

Endelig skal vi argumentere for, at de andre sekvenser ikke kan have led med samme grad som leddet fra $AAA \dots A$ -sekvensen. Dette gælder nemlig ikke i et reduceret knudediagram — her vil nogle af de andre sekvenser have led med samme grad, og der er derfor mulighed for, at leddene med denne grad kan ophæve hinanden.

Men ifølge opgave 10.8 vil sekvenserne S med $a(S) = c - 1$ og $b(S) = 1$ opfylde, at $C_S < C_A$. Graden for leddene fra disse sekvenser er derfor strengt mindre end $c + 2C_A - 2$.

Endelig vil den maksimale grad fra alle andre sekvenser ligeledes være mindre end fra $AAA \dots A$ -sekvensen. Dette skyldes, at graden altid enten aftager eller er konstant, hver gang vi får et ekstra B med i sekvensen, og graden aftager allerede ved det første B .

Dette betyder, at den maksimale grad af Kauffman-polynomiet bliver $c + 2C_A - 2$.

Theorem 28 I et reduceret knudediagram K med c krydsninger er $\text{span}(V(K)) \leq c$.

Er K alternerende, så er $\text{span}(V(K)) = c$. \square

Spændet at $P(K)$ kan beregnes vha. sætning 41:

$$\begin{aligned} \text{span}(P(K)) &= (c + 2C_A - 2) - (-c - 2C_B + 2) \\ &= 2c + 2(C_A + C_B) - 4 \end{aligned}$$

Anvendes sætning 37 ses, at

$$\text{span}(P(K)) = 2c + 2(C_A + C_B) - 4 \leq 2c + 2(c + 2) - 4 = 4c$$

For en alternerende knude fås ifølge sætning 37

$$\text{span}(P(K)) = 2c + 2(C_A + C_B) - 4 = 2c + 2(c + 2) - 4 = 4c$$

Endelig kan spændet af $V(K)$ fås ved division med 4.

Vi kan nu bevise Tait's formodning, sætning 17:

Vi betragter et reduceret, alternerende knudediagram K med c krydsninger.

Vi skal vise, at K er et minimalt diagram.

Antag, at vi har et andet reduceret, alternerende knudediagram for den samme knude med d krydsninger. Men så er $d = \text{span}(V(K)) = c$, og de to diagrammer har det samme antal krydsninger.

Antag nu, at vi har et knudediagram M for den samme knude, men med e krydsninger, og at $e < c$. I så fald er M ikke alternerende. Men sætning 42 viser, at $e \geq \text{span}(V(K)) = c$, hvilket er en modstrid. Diagrammet M kan altså ikke eksistere, og det oprindelige diagram K er minimalt.

En anden anvendelse af sætning 42 er følgende resultat:

Theorem 29 *Knuderne 8_{19} , 8_{20} og 8_{21} er ikke alternerende.* □

Vi nøjes med at bevise, at 8_{19} ikke er alternerende.

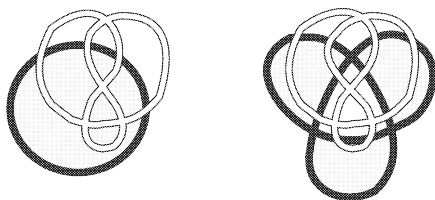
Jones-polynomiet for denne knude er ifølge tabellen bag i bogen

$$V(8_{19}) = -t^8 + t^5 + t^3$$

og dette polynomium har spændet 5.

Men knuden 8_{19} har krydstallet 8, og ud fra sætning 42 kan vi konkludere, at knuden ikke er alternerende.

Hvilke af primlænkerne på figur 77 er ikke alternerende?



Figur 67:

I denne opgave skal vi bevise, at länketallet altid er et lige tal. Metoden minder meget om beviset for sætning 37.

I beviset arbejder vi med knudeprojektioner. Vi tegner først den ene komponent og ser derefter, hvor mange gange den anden komponent skærer den første.

- a) Antag, at den ene komponent er uknuden — den er tegnet med gråt indre på figur 67 til venstre. Den anden, hvide komponent er tegnet oveni. Gør rede for, at den hvide komponent skærer den sorte et lige antal gange. (Vink: Kan den hvide komponent 'snyde' og krydse sig selv samtidigt med, at den krydser den sorte komponent?)

- b) Nu er den første komponent ikke længere uknuden. På tegningen til højre er den tegnet med en skakbræts-farvning, og den hvide komponent er tegnet overni. Gør igen rede for, at der er et lige antal skæringer.
- c) Bevis, at länketallet altid er et lige tal.

13 Jones-polynomiet og chiralitet

Det viser sig, at Jones-polynomiet er god til at skelne mellem en knude og dens spejlbillede:

Theorem 30 *Lad K^* være spejlbilledet af knuden K . Så gælder, at*

$$V(K^*)(t) = V(K)(t^{-1})$$

Kort sagt — $V(K^*)$ fås ved at erstatte alle forekomster af t med t^{-1} i $V(K)$. Vi starter med at bemærke, at man kan lave spejlbilledet af et knudediagram ved ganske simpelt at erstatte alle krydsningerne i diagrammet med de modsatte krydsninger, dvs. at de øverste strenge kommer til at være nederst. Dette betyder, at alle A-split laves om til B-split, og omvendt. For enhver sekvens S i det oprindelige diagram kan vi derfor lave en ny sekvens, \bar{S} , ved at erstatte alle forekomster af A med B og omvendt.

Splitter vi det spejlede knudediagram efter sekvensen \bar{S} , så fås det samme antal uknuder som hvis vi splittede det oprindelige diagram efter S . Dvs. $C_{\bar{S}} = C_S$.

Endvidere er $a(\bar{S}) - b(\bar{S}) = b(S) - a(S) = -(a(S) - b(S))$.

Vi kan nu anvende sætning 31: Summen for $P(K^*)$ fås ved at erstatte alle forekomster af A med A^{-1} , dvs. $P(K^*)(A) = P(K)(A^{-1})$. Bemærk, at størrelsen $(-A^2 - A^{-2})$ er uændret under ombytningen af A med A^{-1} .

Idet alle krydsningerne vender fortegn, fås $w(K^*) = -w(K)$.

Vi kan derfor anvende sætning 28 for at se, at $\hat{P}(K)(A) = \hat{P}^*(K)(A^{-1})$.

Endelig kan vi få udsagnet om Jones-polynomiet ved overgangen fra variabelen A til t .

Trekløverknuden er chiral: Vi ved, at

$$V(3_1) = -t^{-4} + t^{-3} + t^{-1}$$

Sætning 44 fortæller nu, at

$$V(3_1^*) = t + t^3 - t^4$$

Da de to Jones-polynomier er forskellige, kan 3_1 og 3_1^* ikke være isotoper, og trekløverknuden er chiral.

Generelt kan vi se, at hvis K er en achiral knude, så er $V(K)$ uændret under ombytningen af t og t^{-1} . Hvert eneste led med positiv eksponent modsvarer altså af et led med negativ eksponent.

Jones-polynomiet for en achiral knude er altså *palindromisk*.

(Et *palindrom* er et ord eller en sætning, der er uændret, når man læser det bagfra. Eksempler er 'kajak', 'regninger' eller sætningen 'en af dem der red med fane'.)

Et par palindromiske Jones-polynomier er

$$V(4_1) = t^{-2} - t^{-1} + 1 - t + t^2$$

$$V(8_3) = t^{-4} - t^{-3} + 2t^{-2} - 3t^{-1} + 3 - 3t + 2t^2 - t^3 + t^4$$

Det viser sig, at begge knuderne, 4_1 og 8_3 , er achirale, men det kræver naturligvis et bevis. Beviset for ottetalsknudens achiralitet er på figur 21.

Det omvendte gælder ikke — der findes knuder med et palindromisk Jones-polynomium, og som ikke er achirale.

Et eksempel er knuden 9_{42} på figur 68. Den har det palindromiske Jones-polynomium

$$V(9_{42}) = t^{-3} - t^{-2} + t^{-1} - 1 + t - t^2 + t^3$$

men er faktisk ikke achiral.

Det er meget svært at bevise, at denne knude er chiral — man skal have fat i den komplicerede *signatur-invariant*.

Faktisk har man aldrig fundet en achiral knude med et ulige krydstal. Allerede i 1899 fremsatte Tait en formodning om, at alle achirale knuder

havde et lige krydstal. Man ved ikke, om denne formodning gælder i al almindelighed, men den er sand for alternerende knuder.

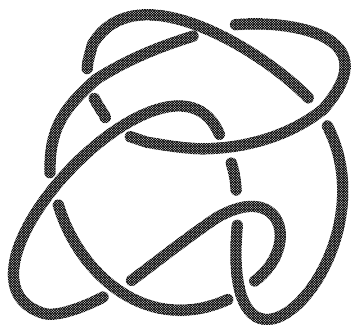
Hvilke af primlænkerne på figur 77 kan være achirale?

Vi skal i denne opgave reformulere sætning 44.

- a) Vis, at for et alternerende, minimalt, achiralt knudediagram K gælder ligningen $3w(K) = C_A - C_B$.

(Vink: Find den minimale og den maksimale grad af $\hat{P}(K)$ vha. sætning 41. Hvis knuden er achiral, så er disse ens pånær fortegn.)

- b) Kan dette resultat bruges til at vise, at 9_{42} er chiral?
 c) Er kællingeknuden chiral eller achiral?
 d) Er råbåndsknabet chiral eller achiral?



Figur 68:

14 Conway-polynomiet

Conway-polynomiet kan spores helt tilbage til 1928. Her definerede amerikaneren J. Alexander det såkaldte *Alexander-polynomium*. Da dette var den første kendte polynomiums-invariant, spillede Alexander-polynomiet en stor rolle i årene fremover. Desværre var Alexander-polnomiets defineret på en yderst indviklet måde, og konkrete beregninger viste sig at blive uhyre komplicerede.

I 1969 redefinerede John Conway imidlertid Alexander-polynomiet. Han anvendte, som vi skal se, en garnnøgle-relation, og gjorde hermed beregningerne meget lettere.

Når man definerer Alexander-polynomiet på Conways måde, omdøber man resultatet til *Conway-polynomiet* — selv om der er tale om den samme invariant.

Definition 15 *Conway-polynomiet*, $\nabla(L)$, til den orienterede lænke L , er den invariant, der opfylder betingelserne

- a) $\nabla(U) = 1$
- b) $\nabla(L_+) - \nabla(L_-) = z \cdot \nabla(K_0)$

I formelen b) anvender vi betegnelserne fra figur 58. □

Symbolet ' ∇ ' kaldes for 'nabla' eller 'del'.

Bemærk, at Conway-polynomiet er en funktion af variabelen z .

Vi bør egentligt nu bevise, at Conway-polynomiet er veldefineret, dvs. at vi kan beregne $\nabla(L)$ for en vilkårlig lænke L ud fra definitionen. Dette er en kompliceret affære, så vi undlader dette.

Lad os i stedet beregne nogle Conway-polynomier. Idet garnnøgle-relationen minder meget om den tilsvarende relation for Jones-polynomiet, kan vi genbruge en hel del.

Vi starter med en nyttig sætning:

Theorem 31 *Lad K og L være to lænker. Så er $\nabla(K \amalg L) = 0$.* □

Conway-polynomiet af alle split-lænker er altså 0. Denne sætning bevises i opgave 14.2.

Vi beregner Conway-polynomiet for den positive Hopf-lænke og anvender her notationen fra figur 60:

$$\begin{aligned}\nabla(L_+) &= \nabla(L_-) + z \cdot \nabla(L_0) = \nabla(U \amalg U) + z \cdot \nabla(U) \\ &= 0 + z \cdot 1 = z\end{aligned}$$

På tilsvarende vis kan vi se, at Conway-polynomiet for den negative Hopf-lænke er $-z$

For at beregne Conway-polynomiet for trekløverknuden anvender vi figur 61:

$$\begin{aligned}\nabla(L_-) &= \nabla(L_+) - z \cdot \nabla(L_0) = \nabla(U) - z \cdot \nabla(L_-) \\ &= 1 - z \cdot (-z) = 1 + z^2\end{aligned}$$

Husk, at L_0 er den negative Hopf-lænke.

Det viser sig, at Conway-polynomiet for en knude altid er et polynomium, hvori der kun optræder lige potenser. For en to-komponent lænke optræder der kun ulige potenser i Conway-polynomiet.

Conway-polynomiet er ikke så anvendeligt som Jones-polynomiet: Conway-polynomiet kan ikke skelne mellem en knude og dens spejlbillede, ej heller mellem mutant-knuderne på figur 63. Begge disse knuder har faktisk det trivielle Conway-polynomium 1, så med denne invariant kan vi ikke engang skelne disse to knuder fra uknuden! Se kapitel 16.

Vis, at Conway-polynomiet for ottetalsknuden er $1 - z^2$.

Bevis sætning 46. Brug figur 62.

I denne opgave skal vi betragte lænkerne C_n fra opgave 8.6. Vi anvender garnnøgle-operationen op den øverste krydsning.

- Vis, at denne øverste krydsning er positiv, og at $(C_n)_+ = C_{n-2}$ og $(C_n)_0 = U$.
- Vis, f.eks. ved induktion, at $\nabla(C_n) = nz$
- (Svær opgave). Bestem Jones-polynomiet for C_n .

Denne opgave er en fortsættelse af opgave 11.5. Vi vil bevise, at de to knuder $4_1 \# 4_1$ og 8_9 er forskellige.

- Bestem $\nabla(8_9)$ vha. tabellen bag i bogen.
- Bestem $\nabla(4_1 \# 4_1)$ — brug formlen $\nabla(K \# L) = \nabla(K) \cdot \nabla(L)$.
- Gør rede for, at de to knuder ikke er isotope.

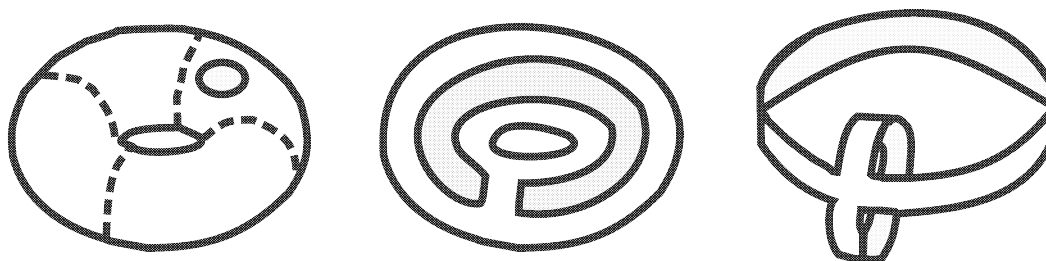
15 Genus-invarianten

Vi vil nu løfte sløret for, hvorledes *genus-invarianten* fra sætning 10 defineres. Da emnet let kan gå hen og blive teknisk, vil vi kun give de grundlæggende ideer.

Som tidligere nævnt er knudeteori en del af den matematiske disciplin, der kaldes *topologi*. Topologi kaldes ofte også for 'gummi-geometri':

Indenfor topologien er vi kun interesserede i objekternes *form* og ikke ting som f.eks. objekternes størrelse. Vi forestiller os derfor, at alle objekterne er lavet af gummi — en speciel slags gummi, der er uendeligt strækbar.

Et eksempel på dette er Reidemeister-træk af type 0 — se figur 6 — hvor vi forestillede os, at den snor, som knuden består af, kan strækkes og deformeres på vilkårlig måde.



Figur 69:

Et andet eksempel kan ses på figur 69. Til venstre er vist en cykelslange med et hul i — det indre af cykelslangen er farvet grå, mens det ydre er hvidt. I midten og til højre ses, hvorledes denne cykelslange kan deformeres til sammensmeltede bånd ved at udvide hullet på passende vis.

Generelt siger vi, at to objekter er *isotope* (eller *homeomorfe*), hvis det ene objekt kan deformeres over i det andet.

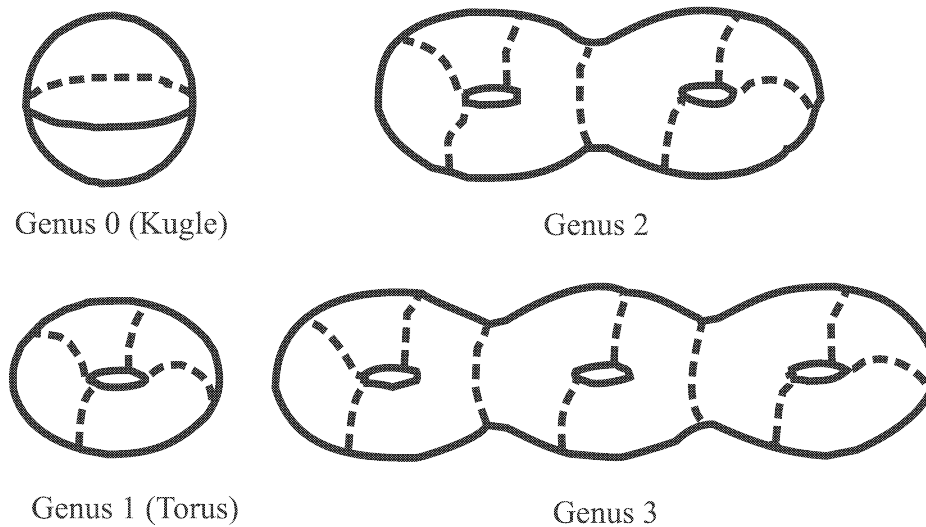
Målet indenfor topologi er at lave en fuldstændig klassifikation af forskellige typer objekter. Dette viser sig dog i almindelighed at være et vanskeligt problem, og kun i ganske få tilfælde er klassifikationen lykkedes.

Et af de succesfulde tilfælde er klassifikationen af flader:

En *flade* er et af objekterne på figur 70. (Teknisk set arbejder vi her med lukkede, orienterede flader). Til hver flade er tilknyttet en invariant, *genus*, som måler antallet af huller i fladen. Der findes naturligvis også flader med genus 4, 5, 6 osv.

Fladen med genus 0 er en kugle. Det er her vigtigt at gøre sig klart, at vi kun taler om kuglens overflade. Fladen med genus 1 kaldes en *torus*. Flader med højere genus har ikke nogen specielle navne.

Sætningen om klassifikation af flader er



Figur 70:

Theorem 32 *To (lukkede, orienterede) flader er isotope, hvis de har samme genus.* □

Kort sagt: For flader er genus en universel invariant.

Nogle flader med genus 0 er en badebold, skallen af en melon og en kasse med låg.

Eksempler på flader med genus 1 er en cykelslange, overfladen af en vanilliekrans og et kaffekrus med en hank.

En suppeterrin med to hanske har genus 2, mens en kringle har genus 3.

Man arbejder også med *flader med rand*. Dette er en lukket almindelig flade, hvor man af fjernet nogle skiver. Objektet på figur 69 er således en torus, hvor der er fjernet en lille skive.

Theorem 33 *To flader med rand er isotope, hvis de har samme genus og det samme antal randkomponenter.* □

Disse sætninger kan føres helt tilbage til Leonhard Euler i 1700-tallet, men blev dog først endeligt bevist i 1920'erne.

For den tids knudeteoretikere var det naturligt at finde en sammenhæng mellem knuder og flader — det er altid en god ide at reducere en kompliceret situation til en simpel situation, som man forstår fuldt ud.

Det lykkedes i 1930 for tyskeren Herbert Seifert at finde en sådan sammenhæng:

Theorem 34 *Til enhver orienteret lænke med K komponenter findes der en flade F med k randkomponenter, således at fladens rand netop er knuden K . En sådan flade kaldes en Seifert-flade.* □

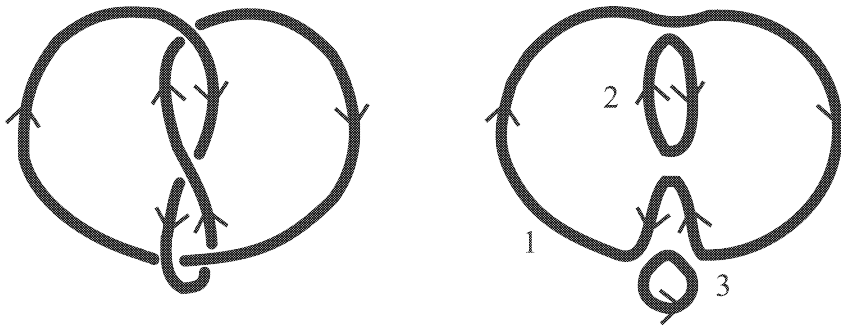
På figur 71 er vist en Seifert-flade for knuden 5_2 .

Generelt kan man fremstille sine egne Seifertflader ved at lave knuden K af ståltråd og herefter dyppe den i sæbevand. Man får da en sæbeboble, som netop er en Seifert-flade. Man opnår de bedste resultater ved at anvende opvaskemiddel og tilsætte lidt glycerin. Glycerinen hjælper med til at stabilisere sæbeboblen.

Lad os bevise Seiferts sætning. Læseren opfordres til at finde papir, saks og lim frem, og at gennemføre konstruktionen i beviset.



Figur 71:



Figur 72:

Vi tager det orienterede knudediagram som til venstre på figur 72 og 'kortsletter' alle krydsningerne. Herved fås diagrammet til højre. Uknuderne i dette diagram kaldes *Seifert-cirkler*.

Vi skal nu klippe og klistre: For hver Seifert-cirkel klipper vi en skive ud, hvis rand netop er Seifert-cirklen. Placér skiverne, så de dækker de tilhørende Seifert-cirkler.

For ottetalsknudens vedkommende får vi brug for tre skiver; på figuren betegnet 1, 2 og 3. Skive 2 kommer til at ligge oven på skive 1.

Disse skiver skal nu limes sammen med papirstrimler — en strimmel for hver krydsning. Klæb strimlens ene ende på en af skiverne tæt ved den oprindelige krydsning, vrid strimlen en halv omdrejning, og lim den anden ende fast på den anden skive.

Ved ottetalsknuden får vi altså to strimler mellem skive 1 og 2 og to strimler mellem skive 1 og 3.

Det fremkomne objekt er en flade med rand, og randen er isotop med den oprindelige knude

Desværre er det lidt svært at se, hvilken genus den konstruerede Seifert-flade har. Her gælder der heldigvis følgende formel, som vi ikke vil bevise:

Theorem 35 *Lad L være et lænke-diagram med k komponenter, c krydsninger og s Seifert-cirkler. Så er genus g af Seifert-fladen fra sætning 49 givet ved*

$$g = \frac{2 - k + c - s}{2}$$

Vi kan nu definere genus-invarianten:

Definition 16 *Lad L være en lænke. Genus til L , $g(L)$, defineres som den mindst mulige genus, som en Seifert-flade med randen L kan have. \square*

Vi kan umiddelbart se, at uknuden har genus 0 — Seifert-fladen er en skive. Et lidt mere kompliceret argument viser, at uknuden er den eneste knude med genus 0.

I beviset for sætning 49 lavede vi en Seifert-flade for ottetalsknuden med 3 Seifert-cirkler. Denne Seifert-flade har ifølge sætning 49 genus

$$g = \frac{2 - 1 + 4 - 3}{2} = 1$$

og da ottetalsknuden ikke kan have genus 0, kan vi konkludere, at $g(4_1) = 1$.

Seiferts sætning viser, at genus-invarianten er veldefineret. Desværre er der eksempler på knuder, hvor den konstruerede Seifert-flade i beviset for sætning 49 ikke har den minimale genus. Japaneren Kunio Murasugi beviste dog i 1958, at dette gælder for alle alternerende knuder.

Konstruér Seifert-fladen for trekløverknuden, og bestem $g(3_1)$.

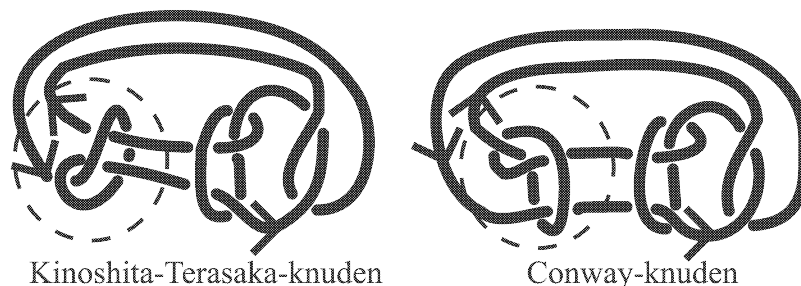
Bestem genus af knuderne 5_1 , 5_2 , 6_1 , 6_2 og 6_3 .

16 Mutantknuder

Vi skal nu studere Kinoshita-Terasaka-knuden og Conway-knuden fra figur 63 nærmere. Vi har tidligere påstået, at de to knuder har ens Jones- og Conway-polynomium, og at Conway-polynomiet endda er trivielt.

Vi kan bevise dette uden at udregne et eneste polynomium! Ideen er at gennemføre en række løsneoperationer inde i kurren, som jo er det eneste sted, de to knuder afviger fra hinanden. Herefter kan vi anvende garnnøgle-relationerne til at bestemme f.eks. Conway-polynomiet. Pointen er, at vi får de samme resultater af løsneoperationerne for de to knuder, og vi kan derfor med det samme konkludere, at Jones- og Conway-polynomiet er ens for de to knuder.

Vi tildeler en vilkårlig orientering til de to knuder. Dette er gjort på figur 73.



Figur 73:

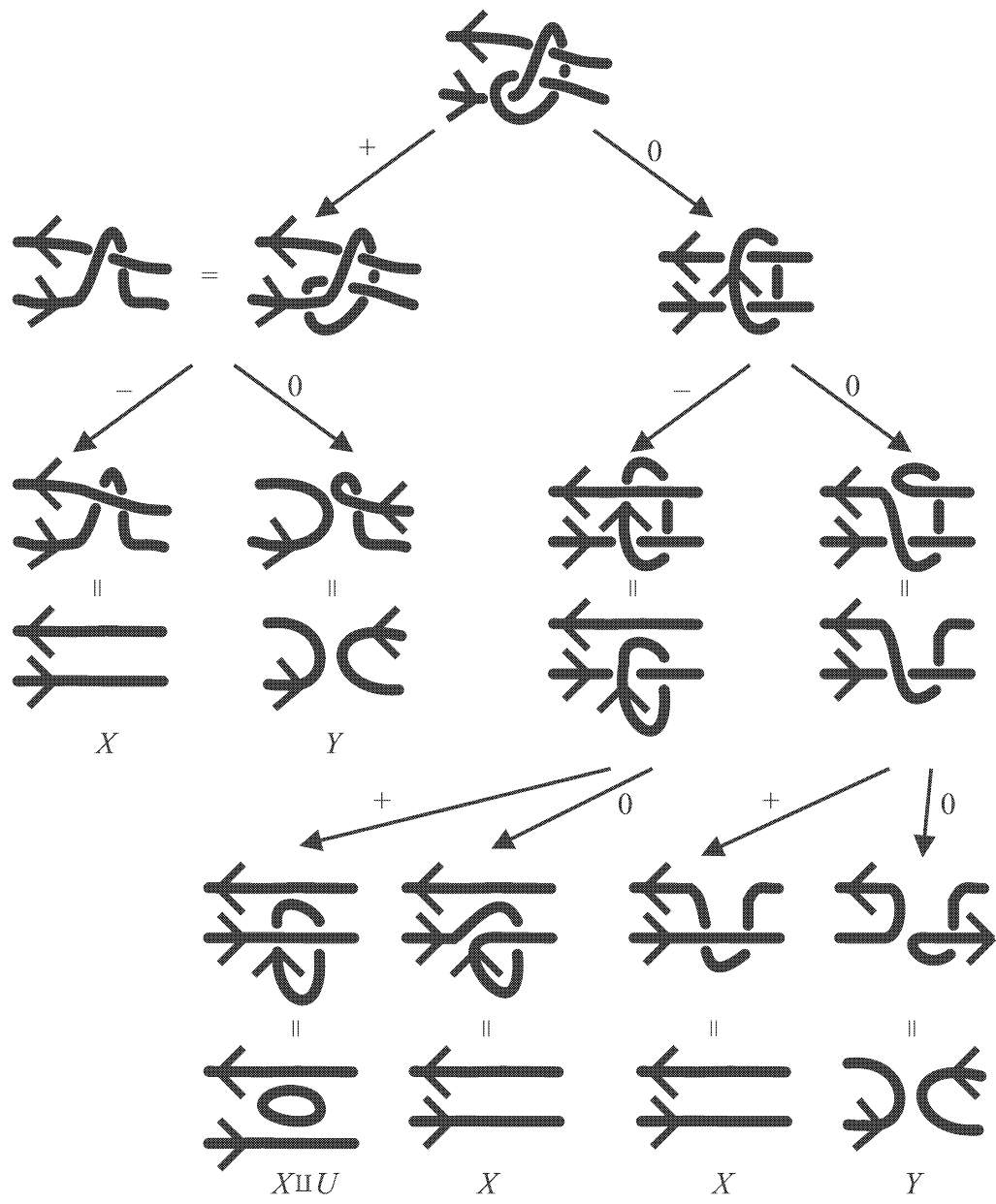
Vi starter med at løse alle krydsningerne i kurren for Kinoshita-Terasaka-knuden. Da vi ikke indtil videre er interesserede i resten af knuden, nøjes vi med at tegne kurren og de fire strenge, der forbinder denne med resten af knuden. Se figur 74.

Som det ses, ender vi med stort set tre forskellige kurrer. Klistrer vi disse kurrer sammen med resten af Kinoshita-Terasaka-knuden, så får vi lænkerne X og Y på figur 75.

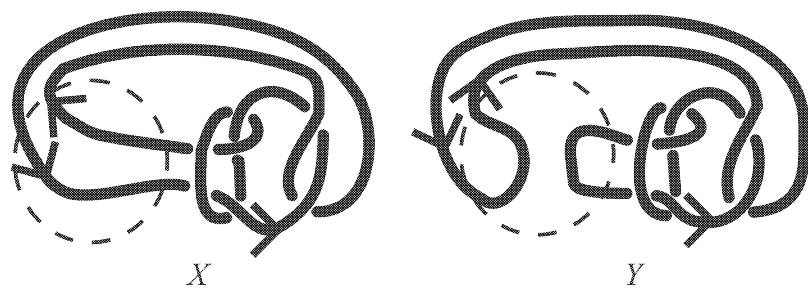
Vi skal senere identificere X og Y .

Lad os udtrykke $\nabla(K)$ vha. $\nabla(X)$ og $\nabla(Y)$:

$$\begin{aligned}
 \nabla(K) &= \nabla(K_+) - \nabla(K_0) \\
 &= \nabla(K_{+-}) + z\nabla(K_{+0}) - z\nabla(K_{0-}) - z^2\nabla(K_{00}) \\
 &= \nabla(K_{+-}) + z\nabla(K_{+0}) - z\nabla(K_{0-+}) + z^2\nabla(K_{0-0}) \\
 &\quad - z^2\nabla(K_{00+}) - z^3\nabla(K_{000}) \\
 &= \nabla(X) + z\nabla(Y) - z\nabla(X \amalg U) + z^2\nabla(X) - z^2\nabla(X) - z^2\nabla(Y) \\
 &= (1 + z^2 - z^2) \cdot \nabla(X) + (z + z^3) \cdot \nabla(Y) - z \cdot \nabla(X \amalg U) \\
 &= \nabla(X) + (z + z^3) \cdot \nabla(Y)
 \end{aligned}$$



Figur 74:



Figur 75:

Husk, at Conway-polynomiet af split-lænken $X \amalg U$ er 0.

Gennemfører vi de samme løsne-operationer for kurren i Conway-knuden, får vi det samme slutprodukt, nemlig X , Y og $X \amalg U$. Beregningen ovenfor sikrer derfor, at vi får det samme Conway-polynomium for de to mutant-knuder. Tilsvarende argumenter gælder for Jones-polynomiets vedkommende.

Løs kurren i Conway-knuden op, således at vi får det samme slutprodukt som ved Kinoshita-Terasaka-knuden.

For at kunne beregne Conway- og Jones-polynomierne for de to knuder, skal vi have identificeret lænkerne X og Y .

Identificér to-komponent lænken Y . Find endvidere — af hensyn til beregningen af Jones-polynomiet nedenfor — länketallet for denne lænke.

Vis, at knuden X faktisk er knuden 6_3 . (Vink: Det er nemmest at lave endnu en løsneoperation, finde Conway-polynomiet og bruge det faktum, at alle knuder med krydstal mindre end 7 har forskellige Conway-polynomier.)

Vis, at Conway-polynomiet for Kinoshita-Terasaka-knuden er trivielt.

Vis, at Jones-polynomiet for Kinoshita-Terasaka-knuden er

$$V(K) = -t^{-4} + 2t^{-3} - 2t^{-2} + 2t^{-1} + t^2 - 2t^3 + 2t^4 - 2t^5 + t^6$$

Bemærk, at dette er en meget lang beregning.

I den sidste beregning brugte vi Jones-polynomiet for 6_3 . Generelt er dette lidt kildent — vi har jo ikke undersøgt, om vi har 6_3 eller spejlbilledet for 6_3 . Heldigvis er dette ikke noget problem — i dette tilfælde — da 6_3 er achiral.

Desværre kan vi ikke bruge sætning 50 til at beregne genus, da knuderne ikke er alternerende. Det viser sig, at Kinoshita-Terasaka-knuden har genus 2, mens Conway-knuden har genus 3. De to knuder er altså ikke isotope.

Vis, at genus for de to knuder er højst 3 vha. sætning 50.

Litteratur

Der findes uheldigvis ikke noget litteratur om knudeteori på dansk. Til gengæld er der en hel række bøger på engelsk, som kan anbefales:

1. Farmer, David & Theodore Stanford: *Knots and Surfaces — A Guide to Discovering Mathematics*. American Mathematical Society, 1991.
2. Adams, Colin: *The Knot Book*. W.H. Freeman, 1994.
3. Gilbert, N.D. & T. Porter: *Knots and Surfaces*. Oxford University Press, 1995.
4. Livingston, Charles: *Knot Theory*. The Mathematical Association of America, 1993.
5. Murasugi, Kunio: *Knot Theory and Its Applications*. Birkhäuser, 1996.

Bog 1 er en elementær introduktion til knuder, flader og grafer. Den giver især en udmærket beskrivelse af flader og fladeklassifikation.

Bog 2 er absolut nødvendig for den vordende knudeteoretiker. I denne bog gives en oversigt over hele knudeteorien på en lettilgængelig måde, og man får indblik i mange andre områder af topologien.

Bog 3 koncentrerer sig mest om genus-invarianten, Alexander-polynomiet og grupper for knuder. Der er et udmærket bevis for fladeklassifikationen.

Bog 4 minder i sit indhold om bog 3, men indeholder også materiale om symmetrier af knuder og højere-dimensional knudeteori.

Bog 5 er skrevet på universitetsniveau, men enkelte kapitler er alligevel lettilgængelige. Der gives en bred oversigt i stil med bog 2.

Endelig bør det nævnes, at der findes utallige hjemmesider på Internettet om knudeteori. Da adresser for hjemmesider på Internettet er af en lidt flygtig natur, gives der ingen referencer. Søg i stedet på emnet 'Knot Theory'.

Tabeller

En liste over samtlige primknuder med krydstal højst 8 er vist på figur 76, mens figur 77 indeholder alle primlænkerne med krydstal højst 6.

I tabellerne er angivet følgende invarianter: Løsnetallet $u(K)$, genus $g(K)$, Jones-polynomiet $V(K)$ og Conway-polynomiet $\nabla(K)$.

I enkelte tilfælde kender man ikke løsnetallet for den pågældende knude. I så fald skrives f.eks. '1/2' for at vise, at løsnetallet er enten 1 eller 2.

Jones-polynomiet for knuder er angivet som koefficienterne i voksende rækkefølge, og hvor nulte-grads-koefficienten er markeret med fed skrift. Således vil knuden 6_1 med $1, -1, 1, -2, \mathbf{2}, -1, 1$ have Jones-polynomiet

$$V(6_1) = t^{-4} - t^{-3} + t^{-2} - 2t^{-1} + 2 - t + t^2$$

For lænker er proceduren tilsvarende — dog skal man gange resultatet med $t^{1/2}$, hvis lænken har et lige antal komponenter.

Conway-polynomiet angives som koefficienterne i voksende rækkefølge. Da kun lige (eller ulige) potenser optræder, angives disse. For 6_1 aflæses tallene $1, 1, 1, 0$ givende

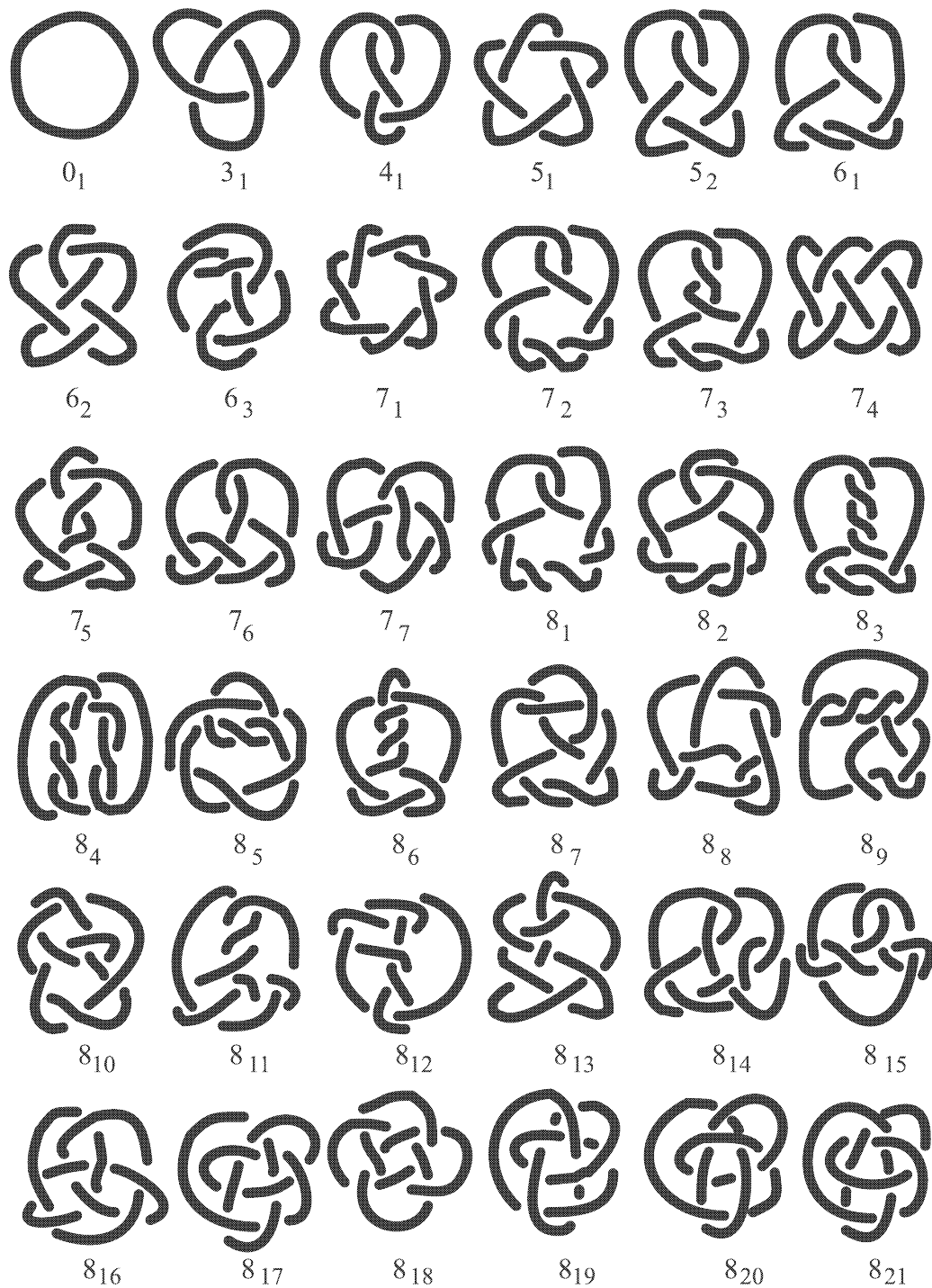
$$\nabla(6_1) = 1 + z^2 + z^4$$

For lænker med et lige antal komponenter skal resultatet ganges med z .

Husk, at både Jones- og Conway-polynomierne for lænker afhænger af den valgte orientering på komponenterne — i tabellen er polynomierne angivet for en vilkårlig orientering.

For sammensatte knuders vedkommende kan man bruge formlerne

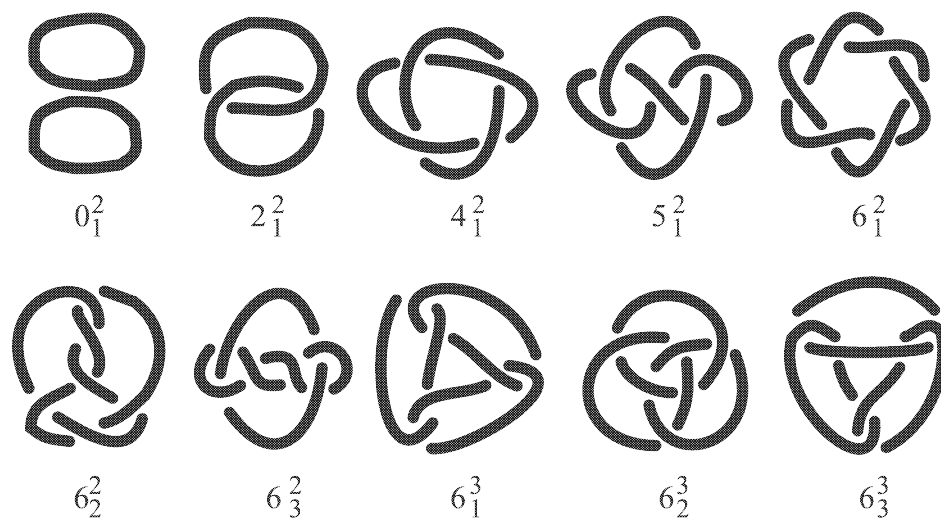
$$\begin{aligned} u(K\#L) &\leq u(K) + u(L) & g(K\#L) &= g(K) + g(L) \\ V(K\#L) &= V(K) \cdot V(L) & \nabla(K\#L) &= \nabla(K) \cdot \nabla(L) \end{aligned}$$



Figur 76:

Invarianter for primknuder

K	$u(K)$	$g(K)$	$V(K)$	$\nabla(K)$
0 ₁	0	0	0	1, 0, 0, 0
3 ₁	1	1	-1, 1, 0, 1, 0	1, 1, 0, 0
4 ₁	1	1	1, -1, 1 , -1, 1	1, -1, 0, 0
5 ₁	2	2	-1, 1, -1, 1, 0, 1, 0, 0	1, 3, 1, 0
5 ₂	1	1	-1, 1, -1, 2, -1, 1, 0	1, 2, 0, 0
6 ₁	1	1	1, -1, 1, -2, 2 , -1, 1	1, -2, 0, 0
6 ₂	1	2	1, -2, 2, -2, 2, - 1 , 1	1, -1, -1, 0
6 ₃	1	2	-1, 2, -2, 3 , -2, 2, -1	1, 1, 1, 0
7 ₁	3	3	-1, 1, -1, 1, -1, 1, 0, 1, 0, 0, 0	1, 6, 5, 1
7 ₂	1	1	-1, 1, -1, 2, -2, 2, -1, 1, 0	1, 3, 0, 0
7 ₃	2	2	0 , 0, 1, -1, 2, -2, 3, -2, 1, -1	1, 5, 2, 0
7 ₄	2	1	0 , 1, -2, 3, -2, 3, -2, 1, -1	1, 4, 0, 0
7 ₅	2	2	-1, 2, -3, 3, -3, 3, -1, 1, 0, 0	1, 4, 2, 0
7 ₆	1	2	-1, 2, -3, 4, -3, 3, - 2 , 1	1, 1, -1, 0
7 ₇	1	2	-1, 3, -3, 4 , -4, 3, -2, 1	1, -1, 1, 0
8 ₁	1	1	1, -1, 1, -2, 2, -2, 2 , -1, 1	1, -3, 0, 0
8 ₂	2	3	1, -2, 2, -3, 3, -2, 2, -1, 1	1, 0, -3, -1
8 ₃	2	1	1, -1, 2, -3, 3 , -3, 2, -1, 1	1, -4, 0, 0
8 ₄	2	2	1, -2, 3, -3, 3, - 3 , 2, -1, 1	1, -3, -2, 0
8 ₅	2	3	1 , -1, 3, -3, 3, -4, 3, -2, 1	1, -1, -3, -1
8 ₆	2	2	1, -2, 3, -4, 4, -4, 3, - 1 , 1	1, -2, -2, 0
8 ₇	1	3	-1, 2, - 2 , 4, -4, 4, -3, 2, -1	1, 2, 3, 1
8 ₈	2	2	-1, 2, -3, 5 , -4, 4, -3, 2, -1	1, 2, 2, 0
8 ₉	1	3	1, -2, 3, -4, 5 , -4, 3, -2, 1	1, -2, -3, -1
8 ₁₀	1/2	3	-1, 2, - 3 , 5, -4, 5, -4, 2, -1	1, 3, 3, 1
8 ₁₁	1	2	1, -2, 3, -5, 5, -4, 4, - 2 , 1	1, -1, -2, 0
8 ₁₂	2	2	1, -2, 4, -5, 5 , -5, 4, -2, 1	1, -3, 1, 0
8 ₁₃	1	2	-1, 2, -3, 5, -5, 5 , -4, 3, -1	1, 1, 2, 0
8 ₁₄	1	2	1, -3, 4, -5, 6, -5, 4, - 2 , 1	1, 0, -2, 0
8 ₁₅	2	2	1, -3, 4, -6, 6, -5, 5, -2, 1, 0, 0	1, 4, 3, 0
8 ₁₆	1/2	3	-1, 3, -5, 6, -6, 6, -4, 3, -1	1, 1, 2, 1
8 ₁₇	1	3	1, -3, 5, -6, 7 , -6, 5, -3, 1	1, -1, -2, -1
8 ₁₈	2	3	1, -4, 6, -7, 9 , -7, 6, -4, 1	1, 1, -1, -1
8 ₁₉	3	3	0 , 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, -1	1, 5, 5, 1
8 ₂₀	1	2	-1, 1, -1, 2, -1, 2 , -1	1, 4, 1, 0
8 ₂₁	1	2	1, -2, 2, -3, 3, -2, 2, 0	1, -2, -1, 0



Figur 77:

Invarianter for primlænker

L	$u(L)$	$g(L)$	$V(L)$	$\nabla(L)$
0_1^2	0	0	$-1, -1$	$0, 0, 0, 0$
2_1^2	1	1	$-1, 0, -1$	$1, 0, 0, 0$
4_1^2	2	1	$-1, 1, -1, 0, -1$	$0, 1, 0, 0$
5_1^2	1	1	$1, -2, 1, -2, 1, -1$	$0, 1, 0, 0$
6_1^2	3	2	$0, 0, -1, 0, -1, 1, -1, 1, -1$	$-1, -4, -1, 0$
6_2^2	2	1	$0, -1, 1, -3, 2, -2, 2, -1$	$1, 2, 0, 0$
6_3^2	2	1	$0, -1, 2, -3, 2, -2, 2, -1$	$0, -2, 0, 0$
6_1^3	3	2	$0, 1, -2, 3, -1, 3, -1, 1$	$0, 1, -1, 0$
6_2^3	2	2	$-1, 3, -2, 4, -2, 3, -1$	$0, 0, 1, 0$
6_3^3	3	1	$1, 0, 1, 0, 2$	$0, 1, 0, 0$

Følgende knuder og lænker har specielle navne:

- 0_1 : uknuden
- 3_1 : trekløverknuden
- 4_1 : ottetalsknuden
- 5_1 : femkløverknuden
- 2_1^2 : Hopf-lænken
- 4_1^2 : firkløverlænken
- 5_1^2 : Whitehead-lænken
- 6_2^2 : de Borromeanske ringe
- $3_1 \# 3_1$: kællingeknuden
- $3_1 \# 3_1^*$: råbåndsknobet

Facitliste

- 1.1 Uknuden: a og c. Trekløverknuden: b
- 2.1 R2, R2, R1
- 3.1 0_1^2 og 8_{10}
- 4.2 6_3^3
- 5.1 Kælinge knuden og råbåndsknabet
- 5.3 $U \amalg U \amalg U = 0_1^2 \# 0_1^2$
- 6.1 4, 3, 6, 4
- 6.3 Uknuden
- 6.5 Der findes 7 forskellige grafer. De nye knuder er $5_1, 5_2, 5_1^2, 3_1 \# 2_1^2$
- 7.2 2, 1, 1
- 7.3 0, 1, 2, 1, 2
- 7.4 2 og 2
- 8.1 -3 og 3
- 8.2 $0, \pm 2, \pm 4, 0$
- 8.3 10 og 8
- 8.5 c: $0_1, 0_1, 2_1^2, 3_1, 4_1^2, 5_1, 6_1^2, 7_1$
- 10.6 $-A^{11} + 2A^7 - A^3 - 2A^{-1} + A^{-5} - A^{-9}$
- 11.1 $-t^{-5/2} - t^{-1/2}$
- 11.2 $t^{-2} - t^{-1} + 1 - t + t^2$
- 11.3 $-t^{-7} + t^{-6} - t^{-5} + t^{-4} + t^{-2}$ og $-t^{-6} + t^{-5} - t^{-4} + 2t^{-3} - t^{-2} - t^{-1}$
- 11.4 $(-t^{-4} + t^{-3} + t^{-1})^2$ og $(-t^{-4} + t^{-3} + t^{-1}) \cdot (t + t^3 - t^4)$
- 11.5 a: $(t^{-2} - t^{-1} + 1 - t + t^2)^2$
- 13.1 6_2^3
- 13.2 b: nej c: chiral d: achiral
- 14.4 b: $1 - 2z^2 + z^4$
- 16.2 Den negative Hopf-lænke
- 12.1 6_3^3 er ikke alternerende.
- 14.3 $\nabla(8_9) = 1 - 2z^2 - 3z^4 - z^6, \nabla(4_1 \# 4_1) = 1 - 2z^2 + z^4$
- 15.1 1
- 15.2 2,1,1,2,2

Stikordsregister

Et **fedt** sidetal angiver, at på denne side er begrebet defineret.

- achiral, **20**, 63ff
- Alexander, J., 9, 65
- Alexander-polynomium, 65
- alternerende, **19**, 45, 58ff, 70
- chiral, **20**, 63ff
- Conway, J., 9, 65
- Conway-knude, **56**, 66, 71ff
- Conway-polynomium, 39, **65ff**, 71ff
- del, **65**
- disjunkt forening, **25**, 54, 65
- Euler, L., 8, 68
- flade, **67**
- fortegn for krydsning, **35**
- garnnøgle-relation, 39, **51**, 57, 65
- genus, 23–24, 56, **67**, 70, **70**, 73
- graf, **27**
- homeomorfi, 67
- Hopf, H., 9
- Hopf-lænke, **8**, 46, 49, 53, 66
- invariant, **12**, 56, 68
- invertibel, **19**
- isotopi, **10**, 67
- Jones, V., 9, 39
- Jones-polynomium, 35, 39, **45**, 51ff, 58ff, 63ff, 71ff
- kællingeknude, **7**, 56
- Kauffman, L., 39, 58
- Kauffman-polynomium, **39–42**, 46ff, 58ff, 63ff
- Kelvin, Lord, 8, 25
- Kinoshita-Terasaka-knude, **56**, 66, 71ff
- kløver-knude, **38**, 66
- knude, **7**
- knuediagram, **10**
- knudeprojektion, **27**
- kortslutning, **51**
- krydstal, **26**, 58ff, 59
- kurre, 56, 71
- lænke, **8**
- lænketal, **36ff**
- løkke, **11**, **43**
- løsneoperation, **32**, 51
- løsnetal, **32**
- Little, C.N., 9, 14, 27, 36, 38
- minimalt diagram, **26**, 33, 36, 61
- Murasugi, K., 58, 70, 74
- mutation, **56**, 66
- nabla, **65**
- navngivning af knuder, 8, **27**
- orientering, **19**
- ottetalsknude, **7**, 15, 20
- palindrom, 64
- Perko, K., 14, 38
- primknude, **24**, 30, 34, 75–78
- primlænke, **24**, 75–78
- råbåndsknob, **7**, 56
- reduceret diagram, **26**, 50
- region, **27**, 58
- Reidemeister, K., 9, 10
- Reidemeister-træk, **10–12**
- sammensat knude, **24**
- Seifert, H., 9, 68
- Seifert-cirkel, **69**
- Seifert-flade, **69**
- sekvens, **47**, 59
- skakbræts-farvning, **27**
- spænd, **58**
- splejsning, **22ff**, 27, 34, 55
- split-lænke, **25**, 65
- splitning, **39**, 46
- Tait, P.G., 9, 27, 29, 58, 61, 64
- Taits formodning, **27**, 58, 61
- topologi, 8, 67
- torus, **67**
- trefarvning, **15–18**
- trekløverknude, **7**, 15, 20, 48, 50, 54, 63, 66
- uknude, **7**, 15, 23
- vridtal, **35ff**, 44
- Whitehead, J.H., 9
- Whitehead-lænke, **8**